ARTIGOS COMPLETOS **44**

RESUMOS DE PESQUISA **56**

RELATOS DE EXPERIÊNCIA **60**

18 a 22 de outubro de 2021
Anais do ENEPE
ISSN 1677-6321

Unoeste

ARTIGOS COMPLETOS

FLUXOS LINEARES NO TORO..... 45

FLUXOS LINEARES NO TORO

Vinicius José Joaquim Ferreira, Fernando Pereira de Souza.

Universidade Federal de Mato Grosso Do Sul – UFMS. E-mail: jf.vinicius21@gmail.com

RESUMO

A teoria de sistemas dinâmicos surge de forma definitiva com os estudos do matemático francês *Henri Poincaré*, porém, o plano de fundo desse campo remete aos tempos de *Isaac Newton* e a lei da gravitação universal. Do ponto de vista da Matemática moderna, podemos dizer que a Dinâmica estuda as imagens sucessivas de uma aplicação $f: X \to X$ e o seu comportamento sujeito a uma variável temporal t, que pode ser classificada tanto em tempo discreto como tempo contínuo. Definimos a órbita $\mathcal{O}_f(x)$ de um ponto $x \in X$ como o conjunto $\{f^t(x)\}$ com $t \in \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ de acordo com a natureza do problema. Neste artigo estamos interessados em definir um homeomorfismo $g: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^3$ entre os toros bidimensional e tridimensional e provar que a escolha de certos parâmetros na equação de um fluxo linear no toro resulta em órbitas periódicas para uma certa família $\mathcal{F}$ de parâmetros e órbitas densas para parâmetros que não são elementos de $\mathcal{F}$.

LINEAR FLOWS ON THE TORUS

ABSTRACT

The theory of dynamical systems definitely emerged with the studies of the french mathematician *Henri Poicaré,* although, the background of this field refers to the times of *Isaac Newton* and the universal law of gravitation. From the point of view of the modern Mathematic, we can say that the Dynamics studies the successive images of an application $f: X \to X$ and his behavior subjected a temporal variable t, that can be classified both into discrete time as continuous time. We define the orbit $\mathcal{O}_f(x)$ of a point $x \in X$ the set $\{f^t(x)\}$ with $t \in \mathbb{Z}$ or $\mathbb{R}$ according to the nature of the problem. In this article we are interested in define a homeomorphism $g: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^3$ between the bidimensional and three-dimensional torus and proof that the choosing certain parameters in the linear flow equation of the torus result in periodic orbits for a certain family $\mathcal{F}$ of parameters and dense orbits for parameters that are not elements of $\mathcal{F}$.

Keywords: Dynamical System; Torus; Linear Flows.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de Dinâmica é um ramo extremamente importante não somente para a matemática, mas também para outros diversos campos de conhecimentos que fazem uso direta ou indiretamente de resultados provindos da Matemática. Podemos de forma generalizada definir o estudo da dinâmica como o estudo do comportamento evolutivo de certos sistemas sujeitos ao tempo sob diferentes condições iniciais. Sabemos que a maior parte das equações que descrevem esse tipo de situação, sequer possuem solução analítica, isso é, funções que podem ser expressas através de séries de potência. E assim, devido a necessidade de se conhecer sobre o comportamento de problemas desse tipo, foi necessário a criação de um novo método de análise que não estivesse vinculado ao simples ato de resolução de equações.

Partindo desse contexto, os estudiosos desse período desenvolveram uma análise qualitativa para esse tipo de problemas, também chamada de analise local, esse método, fazendo uso de conceitos de Análise e Topologia, é capaz de descrever certas características do sistema estudado. No ano de 1887, *Henri Poincaré* venceu uma competição internacional em homenagem ao rei Oscar II da Suécia e Noruega ao resolver o problema dos 3 corpos. Newton já havia solucionado o problema dos 2 corpos, estudando a força de gravidade entre o Sol e a Terra, o que lhe rendeu a sua famosa Teoria da gravitação universal.

Muitos matemáticos já haviam tentado solucionar esse problema e não obtiveram êxito devido à alta complexidade. *Poincaré* deixou de se preocupar em uma formula fechada que determinasse a velocidade e posições exatas dos corpos e se questionou sobre a estabilidade do Sistema Solar. Assim, para solucionar esse problema, foi quem inventou essa nova forma de analise, que mais tarde veio desenvolver a Teoria de Sistemas Dinâmicos, fez com que *Poincaré* ficasse conhecido como "Pai da Dinâmica não Linear". Além de *Poicaré,* outros nomes devem ser destacados quando se fala em Dinâmica. Entre eles, *Birkhoff, Lyapunov* e *Andronov* que contribuíram de forma muito significativa para o enriquecimento dessa nova área da Matemática (LAYEK, 2015).

O objetivo deste trabalho é apresentar um exemplo clássico de um sistema dinâmico linear na superfície do toro e como os seus parâmetros influenciam no comportamento do mesmo, tomando o devido cuidado de se esclarecer os conceitos e afirmações utilizadas para o estudo desse caso.

2. SISTEMAS DINÂMICOS

Definição 1. Seja $f: X \longrightarrow X$ uma transformação. Se $\forall\, n \in \mathbb{N}$ vale*:*

$$f \circ f^n = f^{n+1}\,,$$

e $f^0 = Id,$ então se diz que a transformação f é um sistema dinâmico discreto. De forma mais geral, dados $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e f um sistema dinâmico discreto, então se tem que $f^m \circ f^n = f^{m+n},$ onde $f^0 = Id.$ Além disso, se f é uma transformação invertível, pode-se definir $f^{-n} = (f^{-1})^n\,, \forall n \in \mathbb{Z}.$

Vale salientar que nesse contexto $f^n(x) = \big(f(x)\big)^n$. Aqui, usa-se a notação f^n para representar a n-ésima composição de uma função f com ela mesmo.

Muitas situações do nosso cotidiano que estão sujeitas a uma evolução em tempo discreto podem ser representadas e analisadas através da Teoria de Sistemas Dinâmicos.

Exemplo 1. Juros simples são sistemas dinâmicos discretos.

Suponha que seja feito uma aplicação de $R\$\ 1000{,}00$ em um determinado banco com uma taxa de rendimento de 10% ao ano, ou seja, ao se passar um ano desde a data de aplicação do dinheiro, será somado uma quantia de 10% da aplicação ao montante. Supondo que $P_0 = R\$\ 1000$ seja a aplicação inicial e P_1 o valor do montante com o passar de 1 ano. A situação pode ser representada pela seguinte relação:

$$P_1 = P_0 + 0{,}1 \cdot P_0 = 1{,}1 \cdot P_0,$$

isto é:

$$P_1 = 1000 + 0{,}1 \cdot 1000 = 1100$$

Note que, aplicando a mesma lógica para anos posteriores, tem-se:

$$\begin{aligned} P_2 &= 1{,}1 \cdot P_1 \\ P_3 &= 1{,}1 \cdot P_2 \\ P_4 &= 1{,}1 \cdot P_3 \\ &\vdots \\ P_{n+1} &= 1{,}1 \cdot P_n\,. \end{aligned}$$

Tomando a função $F(x) = 1{,}1x$, segue que:

$$\begin{aligned} P_1 &= F(P_0) \\ P_2 = F(P_1) &= F\big(F(P_0)\big) = F \circ F(P_0) \\ P_3 = F(P_2) &= F\Big(F\big(F(P_0)\big)\Big) \\ &= F \circ F \circ F(P_0)\,, \end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

Uma vez que $F(x) = 1{,}1x$, vale então:

$$\begin{aligned} F\big(F(x)\big) &= 1{,}1 \cdot (1{,}1x) = (1{,}1)^2 x \\ F\Big(F\big(F(x)\big)\Big) &= F((1{,}1)^2 x) = (1{,}1)^3 x \\ &\vdots \\ \underbrace{F \circ F \circ F \circ \cdots F(x)}_{n \text{ vezes}} &= (1{,}1)^n x\,, \end{aligned}$$

o que implica em $F \circ F^n(x) = F^{n+1}(x)$, logo F é um sistema dinâmico discreto.

De maneira semelhante, podemos definir certos tipos que situação que podem ser analisadas com o decorrer contínuo do tempo ao invés de um intervalo de tempo discreto.

Definição 2. Dado um problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad (1)$$

diz-se que a função $\varphi_t : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1, onde $\varphi_t(x) = \varphi(t,x)$ é um fluxo, ou sistema dinâmico contínuo, se $\varphi_t(x)$ é solução do p.v.i. (1) e:

I) $\varphi_0(x) = x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$;

II) $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

Exemplo 2. O p.v.i.

$$\begin{cases} x'(t) = k \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \qquad (2)$$

é um sistema dinâmico contínuo.

A equação diferencial ordinária $x'(t) = kx(t)$ é uma equação com variáveis separáveis, assim, obtemos que:

$$\frac{dx}{dt} = kx\,;$$
$$\frac{dx}{x} = k\,dt\,;$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int k\,dt\,;$$
$$\ln x = kt + c\,;$$
$$x(t) = e^{kt+c} = C \cdot e^{kt}\,.$$

Agora, aplicando o valor inicial:

$$x_0 = Ce^0;$$
$$C = x_0\,.$$

Assim, definindo $\varphi_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi_t = x(t),$$

vale que $\varphi_0 = x(0) = x_0 = Id$.

Tomando agora $s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi_{s+t} &= e^{k(s+t)} \\ &= e^{ks} \cdot e^{kt} \\ &= \varphi_s \circ \varphi_t. \end{aligned}$$

Ambos os tipos de sistemas dinâmicos, discretos e contínuos, podem ser extremamente sensíveis as condições iniciais dependendo de sua natureza. Assim, é extremamente conveniente se observar o comportamento de um sistema sujeito apenas a uma determinada condição inicial.

Definição 4. Seja $f : X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico discreto. Dado $x_0 \in X$, define-se a orbita de x_0 por f, denotada por $\mathcal{O}_f(x_0)$ como o conjunto

$$\mathcal{O}_f(x_0) := \{f^t(x_0)\}_{t \in \mathbb{Z}}\,.$$

Para o caso contínuo, dado uma condição inicial,

$$\mathcal{O}_{\varphi_t}(x_0) = \{\varphi_t(x_0)\}_{t \in I \subseteq \mathbb{R}}\,.$$

Especificar o comportamento de um sistema restrito a apenas uma determinada condição inicial proporciona a possibilidade de classificar diferentes comportamentos de orbitas. Essas classificações são muito importantes para a solução de determinados problemas.

Definição 5. Uma orbita é um ponto fixo de um sistema dinâmico $f : X \to X \ se\ f(x_0) = x_0$.

Definição 6. Diz-se que uma órbita é periódica se para algum $m \in \mathbb{N}$ tivermos $f^m(x_0) = x_0$. Para os sistemas dinâmicos contínuos, se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_t(x_0) = x_0$ então diz-se que o fluxo é periódico. Os valores $m \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{R}$ são chamados de período fundamental.

Órbitas periódicas e pontos fixos são muito importantes para a interpretação de diversos problemas das mais diversas áreas da ciência e podem ser observados em sistemas bastante simples.

Exemplo 3. O sistema dinâmico discreto

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}, \qquad (3)$$

possui um ponto fixo.

De fato, $f(0) = 0$, logo $\mathcal{O}_f(0) = \{0\}$. Assim, $x_0 = 0$ é um ponto fixo.

3. FLUXOS LINEARES NO TORO

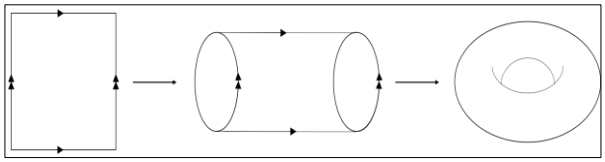
3.1. O Toro

O toro é um espaço topológico que pode ser visto como um subespaço topológico de $\mathbb{R}^2$. Usualmente, o toro é definido como o produto cartesiano $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ e uma relação de equivalência $\sim$, e denotado por $\mathbb{T}^2$. Diz-se que $\mathbb{T}^2$ é um toro bidimensional, ou então um toro plano.

Pode-se generalizar essa estrutura em diferentes espaços euclidianos. Para esse trabalho mais especificamente, pode-se construir o toro tridimensional, isto é, um subespaço topológico de $\mathbb{R}^3$, denotado por $\mathbb{T}^3$ a partir da identificação dos lados opostos do quadrado $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$, feito pela seguinte função:

$$\pi = \begin{cases} (x,0) = (x,2\pi) \\ (0,y) = (2\pi,y) \end{cases}, \forall x,y \in \mathbb{R}\,.$$

Figura 1. Construção do toro tridimensional através da identificação dos lados do toro bidimensional.



Fonte: O Autor.

Note que ${\mathbb{T}^2}/_{\pi} = \mathbb{T}^3$ é um espaço quociente mergulhado em $\mathbb{R}^3$.

Considere agora a seguinte função, $f: \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por:

$$f(u,v) = \begin{cases} x = (R + r\cos v)\cos u \\ y = (R + r\cos v)\cos u \\ z = r\sin v \end{cases} \qquad (4)$$

para $u, v \in [0,2\pi]$. f é chamada de parametrização do toro (DOERING, 2016). É possível, construir a partir da função f um homeomorfismo que mostra que de fato $\mathbb{T}^2$ e $\mathbb{T}^3$ são espaços topológicos homeomorfos, sendo assim indistinguíveis do ponto de vista topológico.

Vamos mostrar que f é uma função injetiva e contínua. De fato, dados $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ vamos mostrar que $f(u_1, v_1) \neq f(u_2, v_2)$.

Para o caso em que $u_1 \neq u_2$, temos que $\operatorname{sen} u_1 \neq \operatorname{sen} u_2$ e assim, $r\sin u_1 \neq r\sin u_2$ e, portanto, $f(u_1, v_1) \neq f(u_2, v_2)$.

Agora, caso $v_1 \neq v_2$, temos que $\cos v_1 \neq \cos v_2$ e, portanto:

$$(R + r\cos v_1)\cos u_1 = (R + r\cos v_2)\cos u_2\,,$$

dessa maneira, $f(u_1, v_1) \neq f(u_2, v_2)$. E com essas duas afirmações, tem-se que f é injetiva para todo $(u,v) \in [0,2\pi)$. Porém, note que $f(x,0) = f(x,2\pi)$ e também $f(0,y) = f(2\pi,y)$. Mas uma vez que $(x,0) = (x,2\pi)$ e $(0,y) = (2\pi,y)$, então f é injetiva para todo $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$. Além do mais, f é contínua, uma vez que cada uma de suas coordenadas é composta pelo produto de seno, cosseno e constantes.

Definindo a função:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{T}^2 &\longrightarrow f(\mathbb{T}^2) \\ (u,v) &\longmapsto f(u,v)\,, \end{aligned} \qquad (5)$$

pode-se perceber que g é uma função bijetiva, uma vez que esta herda a injetividade de f e é sobrejetiva por definição. A continuidade de g vem do fato que f é injetiva.

Uma vez que $\mathbb{T}^2$ é definido como o produto cartesiano de dois intervalos limitados e fechados da reta e todo intervalo limitado e fechado é compacto, com a garantia de que o produto cartesiano de conjuntos compactos é compacto, pode-se afirmar que $\mathbb{T}^2$ é compacto. Como g é uma função contínua e bijetiva com domínio compacto e contradomínio um espaço de Hausdorff, então g é um homeomorfismo (MUNKRES, 2000) garantido assim a equivalência topológica de $\mathbb{T}^2$ e $\mathbb{T}^3$.

3.2. Fluxos Lineares no Toro

Definição 7. Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo. Se f e f^{-1} são funções diferenciáveis, então f é dito um difeomorfismo.

Definição 8. Seja (X, τ) um espaço topológico e $f: X \longrightarrow X$ um difeomorfismo entre esses espaços topológicos, se f satisfaz as propriedades necessárias para ser considerado um sistema dinâmico – seja ele discreto ou contínuo – então dizemos que o sistema gerado por f é um sistema dinâmico topológico.

Bertrand Hussel em seus estudos sobre a filosofia da Matemática declara que a matemática consiste no estudo de todas as sentenças da forma $p \Longrightarrow q$ (BOYER, 1974). Essa afirmação, assim como a de diversos filósofos matemáticos, foi a tentativa de encontrar uma definição precisa para o estudo da matemática. A afirmação de Hussel se assemelha muito a estrutura axiomática desenvolvida pelos gregos, estrutura essa que, a partir de preposições era possível se demonstrar novos resultados. Atualmente, a Matemática de faz uso dessa lógica. Ao se assumir certas condições pode-se cada vez mais refinar resultados já conhecidos ou então chegar-se em novos resultados desejados. Na teoria de Sistemas Dinâmicos não é diferente, com a imposição de certas condições, pode-se estudar de maneira cada vez mais precisa a evolução de um sistema ao longo do tempo ainda que esse não tenha um comportamento bem definido.

Definição 9. Chamamos um sistema dinâmico topológico $f: X \longrightarrow X$ de topologicamente transitivo se existe $x \in X$ tal que a orbita $\mathcal{O}_f(x)$ é densa em X, ou seja, $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$.

Um exemplo bastante simples de sistema dinâmico topológico são as rotações na circunferência. Seja S^1 a circunferência definida a partir da seguinte relação de equivalência. Dado o intervalo $[0,2\pi]$, estabelecendo a seguinte relação de equivalência

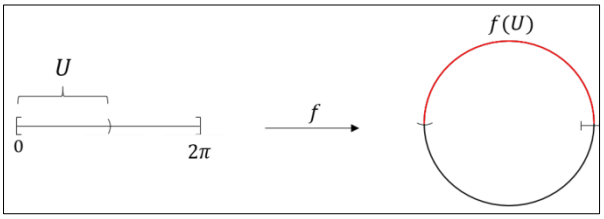
$$\sim := 0 \sim 2\pi,$$

$[0,2\pi]/_{\sim}$ define a circunferência S^1. Note que a função:

$$\begin{aligned} f: [0,2\pi] &\longrightarrow S^1 \\ \theta &\longmapsto e^{i\theta} \end{aligned} \qquad (6)$$

é contínua, $[0,2\pi]$ é um espaço compacto e $S^1 \subset \mathbb{C}$ é de Hausdorff, então f é um homeomorfismo. Assim, vale que S^1 é um espaço homeomorfo ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Figura 2. Homeomorfismo entre S^1 e o intervalo $[0,2\pi]$.



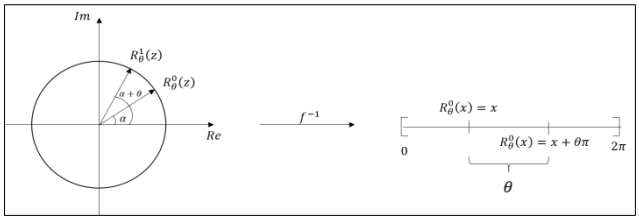
Fonte: O Autor.

Agora, denotando $R_\theta(z) := z_0 \cdot z$, com $z \in \mathbb{C}$ e $z_0 = e^{i\theta}$, a rotação de z por um ângulo de θ radianos. Vale observar que existe uma equivalência com o sistema na reta dado por:

$$R_\theta(x) = x + \theta 2\pi \bmod 2\pi\,, \qquad (7)$$

com $x, \theta \in \mathbb{R}$.

Figura 3. Rotações de R_α em S^1 e $[0,2\pi]$.



Fonte: O Autor.

Exemplo 4. $R_\theta(x)$ é periódico se, e somente se, $\theta \in \mathbb{Q}$.

Se $R_\theta(x)$ é periódico, então existe um número $m \in \mathbb{Z}^*$ tal que $R_\theta^m(x) = x$. Ou seja:

$$x + 2\pi\theta \cdot m \bmod 2\pi = x \bmod 2\pi\,.$$

Segue então que:

$$\cos(x + 2\pi\theta \cdot m) = \cos(x),$$

o que ocorre somente se $\theta \cdot m = n \in \mathbb{Z}$. Assim $\theta = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.

Se θ é racional, então $\theta = \frac{n}{m}$ com $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}^*$. Logo

$$\begin{aligned} R_\theta^m(x) &= x + 2\pi\theta \cdot m \bmod 2\pi \\ &= x + 2\pi \cdot \frac{n}{m} \cdot m \bmod 2\pi\,; \\ &= x + 2\pi \cdot n \bmod 2\pi\,; \\ &= \cos(x + 2\pi \cdot n)\,; \\ &= \cos(x)\,; \\ &= x \bmod 2\pi\,. \end{aligned}$$

Portanto, $R_\theta^m(x) = x$, então $R_\theta(x)$ é periódico.

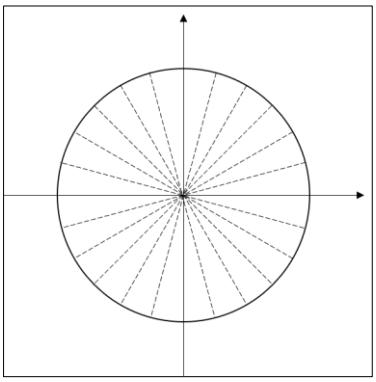
Segue da contra positiva do resultado demonstrado acima, que se $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então $R_\theta(x)$ não é periódico. E com essa afirmação conseguimos estudar novos comportamentos nas orbitas da circunferência.

Definição 10. Seja $f: X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico. Se a orbita de $x \in X$ é densa em X para todo $x \in X$, então dizemos que f é minimal.

Exemplo 5. Se $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então $R_\theta(x)$ é minimal.

Seja $x \in S^1$, vamos mostra que $R_\theta(x)$ é denso em S^1. Seja $y \in S^1$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 > \frac{2\pi}{\varepsilon}$. Dividimos a circunferência S^1 em N_0 intervalos de mesmo comprimento conforme a figura.

Figura 4. Divisão de S^1 em intervalos iguais.



Fonte: O Autor.

Assim, se dois pontos $z, w \in S^1$ pertencem ao mesmo intervalo, então:

$$d(z, w) < \frac{2\pi}{N_0} < \varepsilon\,.$$

Como $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então a orbita $R_\theta(x)$ não possui pontos periódicos, ou seja, todos os pontos de $R_\theta(x)$ são distintos. Dessa forma, os pontos $x, R_\theta(x), R_\theta^2(x), \cdots, R_\theta^{N_0}(x)$ são $N_0 + 1$ pontos distintos distribuídos em N_0 intervalos distintos. Assim, pelo princípio da casa dos pombos existem $0 \leq k, l < N_0$ tais que $R_\theta^k(x)$ e $R_\theta^l(x)$ pertencem ao mesmo intervalo, isto é:

$$d\left(R_\theta^k(x), R_\theta^l(x)\right) < \varepsilon\,.$$

Sem perda de generalidade, pode-se supor que $k < l$. Seja $m = k - l$, tem-se dessa forma que:

$$\begin{aligned} d\left(x, R_\theta^m(x)\right) &= d\left(R_\theta(x), R_\theta^{m+1}\right) \\ &= d\left(R_\theta^2(x), R_\theta^{m+2}(x)\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$= d\left(R_\theta^k(x), R_\theta^l(x)\right) < \varepsilon\,.$$

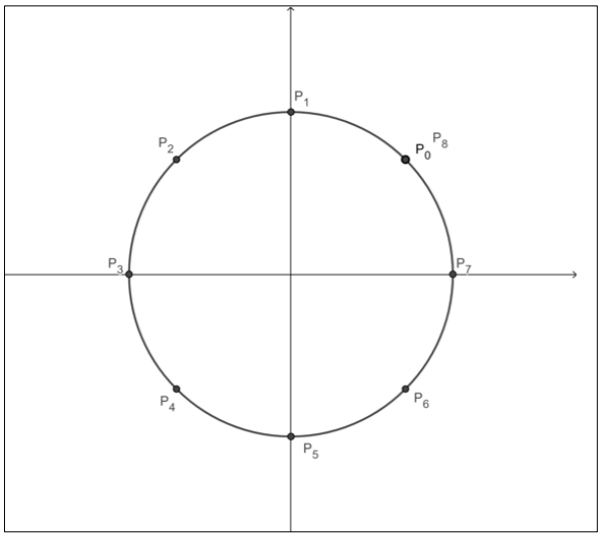
Assim, R_θ^m é uma rotação por ângulo menor que ε, como o intervalo $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ tem comprimento 2ε, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R_\theta^{m\cdot n}(x) \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, ou seja:

$$d\left(y, R_\theta^{m\cdot n}(x)\right) < \varepsilon\,.$$

Isto mostra que o conjunto dos pontos $\left\{R_\theta^t(x)\right\}_{t\in\mathbb{N}}$ é denso em S^1.

Exemplo 5. A orbita do sistema $R_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é periódica com período $m = 8$.

Figura 5. Orbita de $R_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



Fonte: O Autor.

Considere agora o fluxo formado pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_1}{dt} = \omega_1, \\ \dfrac{d\theta_2}{dt} = \omega_2, \end{cases} \qquad (8)$$

onde θ_1, θ_2 são variáveis definidas em $\mathbb{T}^2$.

Note que o sistema (8) pode ser resolvido integrando-se ambos os lados das equações. Assim, o sistema resultante pode ser escrito da seguinte maneira:

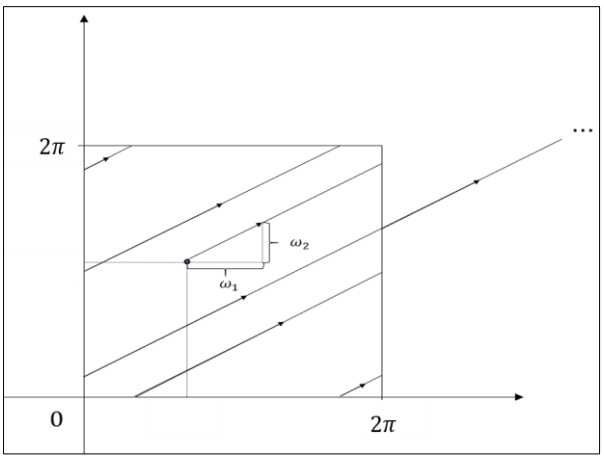
$$T_\omega^t(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \omega_1 t\,, \theta_2 + \omega_2 t) \bmod 2\pi \qquad (9)$$

Observe que a equação (9) define uma curva paramétrica em $\mathbb{R}^2$. Em particular, a equação paramétrica de uma função linear com inclinação $\frac{\omega_1}{\omega_2}$. Como visto, é possível se construir o toro através da identificação dos lados paralelos de um quadrado formado pelo produto cartesiano $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$. Dessa maneira, dada a função linear:

$$y = \theta_2 + \frac{\omega_1}{\omega_2}(x - \theta_1) \bmod 2\pi, \qquad (10)$$

que é a forma reduzida da equação paramétrica (8). Pode se representar graficamente esse sistema da seguinte maneira:

Figura 6. Sistema $T_\omega^t(x_1, x_{,2})$



Fonte: O Autor.

Assim como no exemplo da circunferência, é possível se fazer algumas afirmações apenas analisando os parâmetros ω_1 e ω_2.

Para a prova desse resultado, é necessário se enunciar a seguinte proposição para facilitar a demonstração.

Proposição 1. Sejam X e Y espaços topológicos e $D \subseteq X$ um conjunto denso. Se $f: X \longrightarrow Y$ é contínua e sobrejetiva, então $f(D)$ é denso em Y.

Demonstração. Suponha por absurdo que exista um conjunto $S \neq \emptyset$ tal que

$$f(D) \cap S = \emptyset\,.$$

A contra imagem do conjunto vazio é única pela hipótese de sobrejetividade e pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\emptyset &= f^{-1}(f(D) \cap S)\\ &= \{x \in X: f(x) \in f(D) \cap S\}\\ &= \{x \in X: f(x) \in f(D)\} \cap \{x \in X: f(x) \in S\}\\ &= f^{-1}\big(f(D)\big) \cap f^{-1}(S)\,.\end{aligned}$$

Note que $D \subseteq f^{-1}\big(f(D)\big)$, assim segue que

$$D \cap f^{-1}(S) = \emptyset\,.$$

Uma vez que D é denso em X, temos que necessariamente $f^{-1}(S) = \emptyset$ já que $f^{-1}(S)$ é um aberto em X. Assim temos uma contradição uma vez que a $S \neq \emptyset$ e f é sobrejetiva e a imagem de um conjunto não vazio por uma função sobrejetiva é não vazio.

■

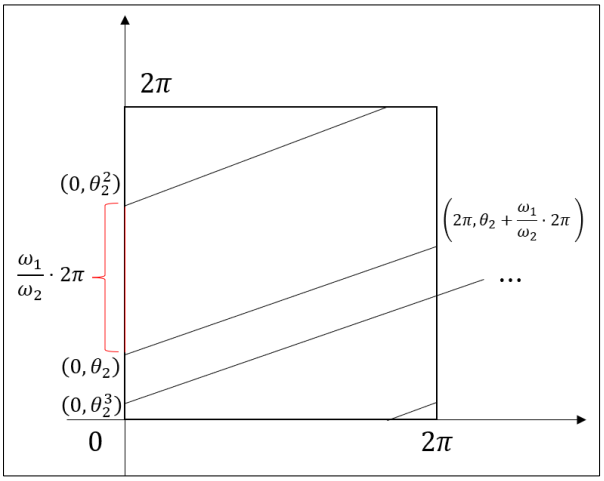
Exemplo 7. Se ${}^{\omega_1}/_{\omega_2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então $T_\omega^t(\theta_1, \theta_2)$ é minimal. Caso ${}^{\omega_1}/_{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ então o sistema é periódico.

Observe que, sem perda de generalidade, fixando $\theta_1 = 0$, as coordenadas de θ_2 estão ao uma distância de exatamente $\gamma = {}^{\omega_1}/_{\omega_2} \cdot 2\pi$ de a cada nova volta. De fato, da equação (10) tem-se para $x = 0$, $y = \theta_2$, ou seja, $(0, \theta_2)$ é o ponto que cora o eixo das ordenadas. Analogamente, para $x = 2\pi$ temos o ponto $\left(2\pi, \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot 2\pi + \theta_2\right)$ que pela relação de equivalência definida em $\mathbb{T}^2$ é igual ao ponto $\left(0\,, \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot 2\pi + \theta_2\right)$. Como ambos os pontos estão sobre o eixo das ordenadas, a distância dos dois é igual ao modulo da diferença, que é igual a $\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot 2\pi$. Segue por indução que a distância entre quaisquer dois pontos consecutivos da orbita de T_ω^t fixado $\theta_1 = k$ possui distancia $\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot 2\pi$, isto é:

$$d\left(\left(0, \theta_2^k\right), \left(0, \theta_2^{k+1}\right)\right) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot 2\pi\,.$$

Dessa forma, definindo $\gamma := \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot 2\pi$, da equação (7), $T_\omega^t(0, \theta_2) = R_\gamma(\theta_2)$ que é denso em $[0,2\pi]$ uma vez que $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. De maneira generalizada, fixado $\theta_1 = k$, a os pontos de T_ω^t são densos em $\{k\} \times [0,2\pi]$. Assim, para qualquer $y \in \mathbb{T}^2$ e $\varepsilon > 0$, é possível se encontrar pontos tão próximo quanto se queiram de y. Portanto, o sistema $T_\omega^t(\theta_1, \theta_2)$ é denso em $\mathbb{T}^2$.

Figura 7. Distância dos pontos de $T_\omega^t(0,\theta_2)$.



Fonte: O Autor.

Agora, se $\gamma = {}^{\omega_1}/_{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ então temos que $(\theta_1+\omega_1 t) \bmod 2\pi$ tem período $t=2\pi$, pois dessa forma, $(\theta_1+\omega_1 2\pi) \bmod 2\pi = \theta_1$. De maneira análoga, para $(\theta_2+\omega_2 t) \bmod 2\pi$ temos que o período fundamental também é $t=2\pi$. Assim, tomando $t=2\pi$, temos que:

$$(\theta_1+\omega_1 t, \theta_2+\omega_2 t) \bmod 2\pi = (\theta_1,\theta_2),$$

logo $T_\omega^t(\theta_1,\theta_2)$ é periódico.

Vale lembrar que a parametrização, equação (5) do toro é um homeomorfismo entre o toro bidimensional $\mathbb{T}^2$ e o toro tridimensional $\mathbb{T}^3$. Aplicando as coordenadas do sistema em $\mathbb{T}^2$ na equação da parametrização, temos o novo sistema em $\mathbb{R}^3$. Chamando $a = x_1+\omega_1 t$ e $b = x_2+\omega_2 t$, temos:

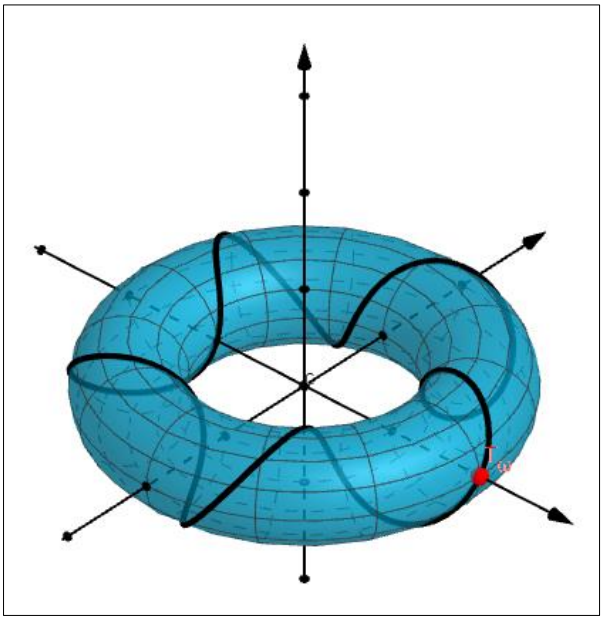
$$f(a,b) = \begin{cases} x = (R+r\cos b)\cos a \\ y = (R+r\cos b)\cos a \\ \quad z = r\,\mathrm{sen}\, b \end{cases} \qquad (11)$$

Uma vez que um homeomorfismo é uma função contínua e bijetiva, então a imagem de um conjunto denso em $\mathbb{T}^2$ é denso em $\mathbb{T}^3$. Dessa maneira, podemos concluir que se $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ então o fluxo $\{T_\omega^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ em $\mathbb{T}^3$ é denso.

Note que a parametrização é uma função com período $t=2\pi$.

Exemplo 7. Considere o toro tal que $R=3$ e $r=1$ com parâmetros $\omega_1=1$, $\omega_2=5$ e ponto inicial $T_\omega^0=(4,0,0)$, a orbita de $T_\omega^t(4,0,0)$ é uma curva fechada.

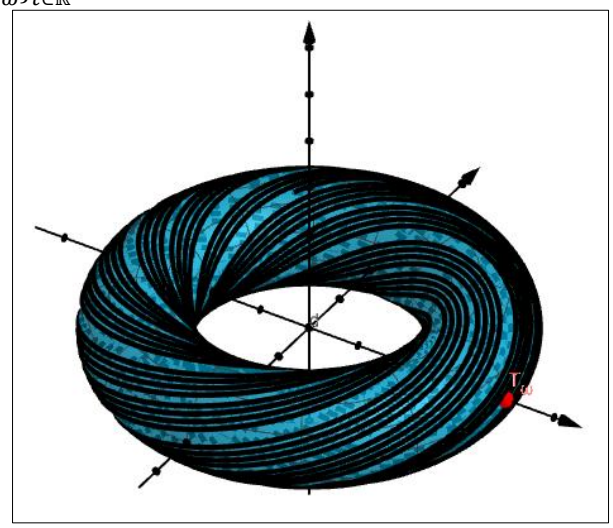
Figura 8. Orbita periódica de $\{T_\omega^t\}_{t\in\mathbb{R}}$.



Fonte: O Autor.

Exemplo 9. *C*onsidere o mesmo toro do exemplo anterior, mas agora com os parâmetros $\omega_1 = \sqrt{2}$ e $\omega_2 = \sqrt{3}$ e ponto inicial $T_\omega^0 = (4,0,0)$. A orbita $T_\omega^t(4,0,0)$ é uma curva densa em $\mathbb{T}^3$.

Figura 9. Orbita densa de $\{T_\omega^t\}_{t\in\mathbb{R}}$.



Fonte: O Autor.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da Dinâmica em comparação com outros campos da Matemática é extremamente recente e ainda está em desenvolvimento. Esse resultado já é bastante conhecido entre os estudiosos dessa área e aparece em quase todos os livros de Teoria de Sistemas dinâmicos como KATOK, LAYEK, HIRSCH et. al. Mesmo com essa grande repercussão, muitas das vezes é tratado como um simples exemplo dentro de um contexto mais abrangente. Por ser relativamente simples, em comparação a outros tipos de sistemas dinâmicos, os fluxos lineares podem ser abordados como um primeiro contato com a Dinâmica Matemática, mostrando os diferentes comportamentos de um sistema dado diferentes parâmetros.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS) bem como ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).

REFERÊNCIAS

BOYER, C. **História da Matemática.** 1ª Edição. São Paulo: Editora da USP. 1974.

DOERING, C. L.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias.** 6ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

KATOK, A.; HASSELBLAT, B. **An Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.** 2ª Edição. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

LAYEK, G.C. **Na Introduction to Dynamical Systems and Chaos.** 1ª Edição. Índia: Springer, 2015. https://doi.org/10.1007/978-81-322-2556-0_1

MUNKRES, J. R. **Topology.** 2ª Edição. Prentice Hall, 2000.

HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos.** 2ª Edição. Elsevier (USA), Academic Press, 2004.

RESUMOS DE PESQUISA

MODELAGEM BÁSICA: O IMPACTO PERCENTUAL NA RENDA FAMILIAR CAUSADO PELO CONSUMISMO DAS CRIANÇAS E ADOLESCENTES..... 57

MÉTODOS DE AJUSTE DE CURVAS APLICADOS A DADOS DA COVID-19 58

O USO DO SOLVER - EXCEL COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO 59

Pesquisa (ENAPI)

Comunicação oral on-line

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

MODELAGEM BÁSICA: O IMPACTO PERCENTUAL NA RENDA FAMILIAR CAUSADO PELO CONSUMISMO DAS CRIANÇAS E ADOLESCENTES

ANA PAULA BRANDÃO DE MELO
LEONARDO HENRIQUE MELO DE CARVALHO

O avanço nos processos de industrialização bem como o desenvolvimento de ferramentas midiáticas, em larga escala, vem corroborando para mudanças nas perspectivas sobre o que são gastos essenciais. Trazer o essencial para uma criança e para sua criação em geral não é algo fixo, como se fosse um aspecto geral e absoluto. Este é regido pela cultura e meios econômicos que cada núcleo familiar possui, assim, pensar no que é essencial está antes em se atentar para os efeitos sociais e econômicos nos quais as crianças estão inseridas. O crescimento nos estímulos ao consumismo vem atingindo as crianças e isso vem ocasionando um crescimento nos gastos familiares de forma a contribuir para o endividamento em larga escala. A análise desse tema tem como objetivo principal demonstrar o real impacto que a comercialização da infância projeta em famílias de renda média. Nesse estudo foi utilizado uma modelagem básica mostrando o poder de compra estimulado pelas crianças, devidamente influenciadas pelos meios midiáticos e sociais. Para tal análise será feito uso de sites e dados, ligados a instituições de alta credibilidade como, por exemplo, IBGE e ONU, a fim de esquematizar o poder de compra de uma criança. Essa modelagem se dará da seguinte forma: Primeiro calculamos o montante de gastos que todas as famílias brasileiras possuem de forma geral e, calculamos a porcentagem que os gastos com produtos infantis têm sobre o montante anteriormente disposto. Por meio das análises feitas definimos que uma criança, apesar de não possuir renda nenhuma, impacta um consumo de 40% nos gastos familiares. Usando dos dados obtidos notamos que a renda média de uma família está em torno de R$ 1400,00, portanto para garantir esse consumo grande parte das famílias brasileiras necessitam entrar em linhas de créditos diversas, gerando assim, um endividamento progressivo. Agora note que, se o poder compra dessa faixa etária fosse reduzida para 10% dos gastos familiares, então os gastos totais estariam em torno de R$1330,00, assim evitando o endividamento em larga escala. Por intermédio deste estudo podemos analisar de forma crítica o impulso econômico, que os mercados regulados pelo público infantil e juvenil, geram para a economia familiar. Com isso, através dos dados do IBGE podemos efetuar uma abordagem matemática, a fim de caracterizar o poder de compra das crianças e criar um alerta sobre o impacto dessa ação no gasto familiar o qual pode causar um endividamento.

Pesquisa (ENAPI)

Comunicação oral on-line

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

MÉTODOS DE AJUSTE DE CURVAS APLICADOS A DADOS DA COVID-19

EDUARDO FORNAZIERI FILHO
GUILHERME DE LIMA PEREIRA
VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

A pandemia de Covid-19 prejudicou inúmeras nações no aspecto econômico ou social, transformou o cotidiano das pessoas, superlotou hospitais e evidenciou que é preciso se preparar para não enfrentar problemas semelhantes no futuro. Este trabalho apresenta uma possibilidade de compreender o comportamento dos óbitos relacionados ao vírus da Covid-19. A notabilidade deste estudo se relaciona com a necessidade urgente de obter informações relevantes e seguras sobre uma enfermidade que ameaça a vida dos seres humanos. O principal objetivo deste trabalho é modelar uma função que estime o número de óbitos afim de servir como ferramenta confiável para tomada de decisões. Será utilizado o método dos mínimos quadrados para obter uma função que melhor se aproxima dos dados já observados. Utilizou-se uma amostragem sistemática para identificar a estrutura dos dados existentes e obter um conjunto com características populacionais em um número específico de pontos, definindo-se um intervalo de 7 dias entre cada dado. Para posterior comparação dos resultados, será utilizado o polinômio interpolador de Lagrange em intervalos de 35, 49 e 70 dias. A reta foi o primeiro resultado alcançado. Devido a distribuição não linear dos dados, a reta torna-se uma má escolha para explicar a variável dependente. De modo sucinto, o coeficiente que mensura a qualidade do ajuste, denotado por A é dado por 0,42. Isto é, o valor estimado e o real possuem uma relação de representatividade de 42%, que é um valor baixo para considerar a confiabilidade desta estimativa. A regressão linear retorna outros dois polinômios de graus 6 e 18, que devido às suas geometrias, aproximam-se com mais efetividade do dado real. A qualidade destas aproximações são, respectivamente, 0,81 e 0,89. Vale ressaltar que o ajuste perfeito seria quando A = 1. Como comparativo, obteve-se três polinômios interpoladores de Lagrange de graus 6, 8 e 12. Comparando-os entre si, o primeiro deles é o que mais se aproxima da distribuição real dos dados, enquanto os demais cometem erros na casa dos milhares em pontos não interpolados. Diante dos resultados alcançados, é possível concluir que o método dos mínimos quadrados é o mais recomendado para problemas que envolvem aproximações seguras para dados que foram medidos. A qualidade do ajuste polinomial pode ser aperfeiçoada retirando-se alguns pontos como picos e vales. Não é recomendado o uso de polinômios interpoladores para análises em conjuntos discretos com muito elementos.

Pesquisa (ENAPI)

Comunicação oral on-line

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

O USO DO SOLVER - EXCEL COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO

MARINA SCHIMIDT
RUBENS LUIZ RODRIGUES
VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

A busca pelo progresso do ensino de Matemática e a adequação do currículo nas escolas de Ensino Médio têm propiciado cada vez mais a professores utilizarem metodologias inovadoras de se trabalhar o conhecimento. O desenvolvimento de modelos matemáticos e o uso de simulações têm contribuído para a melhoria da qualidade desse ensino oferecido. O presente trabalho tem como principal objetivo investigar a utilização do software Solver - Excel como ferramenta de apoio ao professor na criação de uma disciplina eletiva na área de Matemática Aplicada, dentro das diretrizes que o novo Currículo Paulista tem proporcionado. O software Solver - Excel será utilizado para auxiliar na compreensão e resolução de alguns problemas relacionados ao tema Programação Linear. A metodologia usada consiste no desenvolvimento de um material de apoio ao professor acerca de alguns temas relevantes sobre a Programação Linear a serem propostos ao longo da implantação de uma disciplina eletiva, conforme prevê o contexto do novo Currículo Paulista. Dentre os diversos métodos de resolução de problemas de Programação Linear, a resolução de situações problemas por meio do método analítico torna-se trabalhoso para problemas mais complexos. Sendo assim, na busca de uma solução ótima para um problema de Programação Linear, o método computacional por meio do Solver - Excel mostrou-se ser mais viável e rápido em relação a esses métodos. A pesquisa foi planejada e focada no software Solver - Excel, que apesar das vantagens e desvantagens apresentadas pelo material didático elaborado, vai poder subsidiar o trabalho do professor e demais interessados em utilizar essa ferramenta. O Solver é um suplemento do Excel que permite extensões na simulação de rendimentos; por exemplo, é possível observar o aumento do investimento em um processo de produção e, como resultado final, o crescimento dos lucros. O software Solver, por meio do desenvolvimento dos projetos envolvendo problemas de Programação Linear sob contexto do novo Currículo Paulista e como material de apoio ao professor na implementação de uma nova disciplina eletiva, mostrou sua funcionalidade em trabalhar com simulações computacionais no âmbito do Ensino Médio. Por fim, cabe ao professor, mediar e desenvolver projetos por meio dessa ferramenta afim de avaliar a culminância do produto final, além disso viabilizar a eficácia desse software na continuidade da eletiva

RELATOS DE EXPERIÊNCIA

E?MAT: REFLEXÕES SOBRE A PARTICIPAÇÃO DOS ESTUDANTES DO IFSP/PEP EM COMPETIÇÕES CIENTÍFICAS 61

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA E PANDEMIA COVID-19: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE INTERPRETATIVA EM CONTEXTO REAL E SIGNIFICATIVO 62

PREPARAÇÃO E MOTIVAÇÃO: RELATOS DE EXPERIÊNCIA REMOTA NO TRABALHO DE TREINAMENTO INTENSIVO DE ESTUDANTES ATRAVÉS DO POTI PARA AS PROVAS DA OBMEP 63

TO.MAT.E: REFLEXÕES A RESPEITO DE AÇÕES DE MONITORIA A ESTUDANTES INGRESSANTES NOS CURSOS TÉCNICOS INTEGRADOS DO IFSP/PEP 64

Ensino (ENAENS)

Comunicação oral on-line

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

E?MAT: REFLEXÕES SOBRE A PARTICIPAÇÃO DOS ESTUDANTES DO IFSP/PEP EM COMPETIÇÕES CIENTÍFICAS

CLEBER LUIZ DA CUNHA
ENIO FREIRE DE PAULA

Nesse relato de experiência socializamos alguns resultados do projeto de ensino intitulado "Estudo, Planejamento e Implementação de competições científicas de Matemática no campus IFSP/PEP - E?MAT" desenvolvido nos últimos dois anos (2020-2021) no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus Presidente Epitácio (IFSP/PEP). No decorrer do período considerado, o projeto obteve fomento por meio da Coordenadoria Sociopedagógica do IFSP/PEP, junto ao programa institucional Bolsa Ensino. O recurso financeiro obtido é direcionado ao pagamento de uma bolsa a estudante vinculada ao projeto. Nosso objetivo foi discutir a organização, o planejamento e a análise dos resultados dos estudantes dos Cursos Técnicos Integrados em Informática e Mecatrônica (1º, 2º e 3º anos) em duas competições científicas relacionadas à Matemática tradicionalmente ofertadas em âmbito nacional, a saber: (i) a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP e (ii) a Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica - OBA. Entendemos que ofertar a oportunidade dos estudantes dos Cursos Técnicos Integrados participarem de competições como as destacadas pode, além de aperfeiçoar seus conhecimentos básicos de Matemática, propiciar melhorias significativas nas atividades de resolução de problemas, ao serem problematizadas no contexto de sala de aula. Como resultados das ações desenvolvidas no decorrer do projeto, destacamos três pontos: (i) apesar do pequeno número de participantes no período pandêmico, conseguimos resultados positivos, inclusive medalhistas; (ii) os problemas presentes nas competições foram problematizados no decorrer das aulas de Matemática e (iii) no retorno presencial organizaremos momentos de discussão com os estudantes para fomentar a participação em futuras edições destas competições. Órgão de fomento financiador da pesquisa: Bolsa Ensino (IFSP) A dinâmica das atividades envolveu a organização de uma agenda dos eventos e da realização do convite aos estudantes dos cursos integrados. Devido ao contexto pandêmico, a participação em outras duas competições científicas (a Canguru de Matemática Brasil e a Olimpíada Brasileira de Robótica) não foram possíveis. A bolsista e os docentes vinculados ao projeto acompanham os estudantes participantes mediante acesso remoto on-line nas plataformas de realização das provas.

Ensino (ENAENS)

Comunicação oral on-line

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA E PANDEMIA COVID-19: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE INTERPRETATIVA EM CONTEXTO REAL E SIGNIFICATIVO

FLÁVIA PEREIRA RIGHI

Diante do cenário de ensino remoto imposto pela pandemia da Covid-19, professores de todos os níveis educacionais precisaram se reinventar de modo a manter os processos de ensino e aprendizagem, bem como fazê-lo numa perspectiva interessante que mantivesse a atenção e participação dos estudantes. Este trabalho tem por objetivo relatar a experiência de uma atividade desenvolvida em março/2020, início do ensino remoto, na disciplina de Matemática, sobre o conteúdo de Interpretação Estatística. Esta atividade foi aplicada às turmas de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Rio Grande do Sul. Em síntese, observou-se que, nesta atividade proposta, os estudantes se mostraram mais interessados e participativos na atividade, bem como confiantes em suas aprendizagens. É importante, enquanto professores, mostrar aos estudantes o quanto eles são capazes e suas aprendizagens são significativas diante de um contexto real. Isso promove empoderamento e entusiasmo, qualidades tão necessárias tanto no ensino remoto quanto no presencial. A proposta trazia algumas reportagens sobre o coronavírus, suas características e taxa de mortalidade comparada a outras doenças infecciosas, bem como gráficos de sua evolução diária de contaminação. A partir da leitura e discussão do assunto com a turma, fora realizado alguns questionamentos em relação a interpretação estatística dos dados trazidos nas reportagens. Um dos questionamentos solicitava a interpretação de um gráfico a respeito da evolução diária de contaminados pelo vírus na China e no mundo. Os estudantes, de modo geral, interpretaram as informações trazidas no gráfico e responderam que o grau de transmissibilidade do vírus era alto, porém o número de óbitos, ou seja, a taxa de letalidade da doença era baixa. Além disso, a partir de dados estatísticos trazidos no texto das reportagens, os estudantes interpretaram esses dados e aplicaram a outros contextos, como por exemplo, no recorte "Segundo estudo realizado pelo Centro Chinês de Controle e Prevenção de Doenças - CCDC, a taxa geral de mortalidade da doenças em idosos com mais de 80 anos chega a 14,8%", em que os estudantes aplicaram esta estatística a um contexto fictício de uma população de 100 mil habitantes em que 20% representa idosos com mais de 80 anos, e assim, concluíram que, estatisticamente, poderiam afirmar que 2960 idosos dessa população morreriam, salvo outras características aleatórias que influenciam nesse cenário.

Extensão (ENAEXT)

Comunicação oral on-line

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

PREPARAÇÃO E MOTIVAÇÃO: RELATOS DE EXPERIÊNCIA REMOTA NO TRABALHO DE TREINAMENTO INTENSIVO DE ESTUDANTES ATRAVÉS DO POTI PARA AS PROVAS DA OBMEP

FERNANDO NOVOLI BURGO
WELLIKS FELIPE DE OLIVEIRA
JOSÉ ROBERTO NOGUEIRA

Realizado pelo IMPA, a OBMEP é um projeto nacional criado em 2005 que tem por objetivos principais estudar Matemática e identificar estudantes de escolas brasileiras, públicas e privadas, com talentos na área. Assim, diversos projetos de orientação são realizados buscando desenvolver estudos com esses estudantes, sendo essa a função do Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI). Relatar a atuação de Professores e Graduandos do Curso de Licenciatura em Matemática da FCT/UNESP, orientando estudantes do POTI. Mais que preparar, o projeto busca motivar estudantes das escolas para as futuras provas/fases da OBMEP e demais olimpíadas, como OBM e Mandacaru. Ademais, pretende-se também divulgar o projeto e contar a experiência, no contexto atual de isolamento social, e como ocorre aproximação dos estudantes com o ensino acadêmico. Com efeito, destaca-se a importância do trabalho desenvolvido. Atualmente, muito discute-se alfabetização científica e pensamento crítico. Assim, o POTI é um dos projetos da OBMEP de incentivo e preparação para estudantes ingressarem nas áreas científicas e tecnológicas, onde diversos talentos são identificados e potencializados. Portanto, esse estudo proporciona o aprofundamento teórico e uma abordagem efetiva/sistematizada que conduz os estudantes a desenvolverem suas habilidades e a construírem seu conhecimento, sempre motivados e amparados por diversos professores dedicados aos objetivos do projeto. Órgão de fomento financiador da pesquisa: IMPA. O POTI atua em cursos de Treinamento Intensivo com foco em competições de Matemática, cuja principal preocupação é melhorar o desempenho de estudantes brasileiros em olímpiadas afins por meio de aulas presenciais (hoje remotas pelo cenário) em Polos que contemplem demanda e estrutura adequadas. Nas aulas, são ofertados conteúdos de quatro temáticas fundamentais: Geometria, Contagem e Combinatória; Álgebra e Aritmética e Teoria dos Números. Atualmente, o estudo é totalmente remoto e com frequência semanal, intercalando aulas dos temas citados. Além disso, são realizadas provas (simulados) quinzenais, onde os estudantes são submetidos à avaliações em constante busca por aprendizado e autocorreção, pois são feitos momentos de devolutiva das questões propostas nos simulados. As aulas do POTI são expositivas e dialogadas, sendo essa sua metodologia, e compreendem todos os níveis da OBMEP, visando a construção e a orientação do autoaprendizado. Ainda, os materiais são preparados de acordo com os conteúdos do Portal da Matemática, da OBMEP.

TO.MAT.E: REFLEXÕES A RESPEITO DE AÇÕES DE MONITORIA A ESTUDANTES INGRESSANTES NOS CURSOS TÉCNICOS INTEGRADOS DO IFSP/PEP

CLEBER LUIZ DA CUNHA
ENIO FREIRE DE PAULA

Nesse relato de experiência socializamos alguns resultados do projeto de ensino intitulado "Tópicos de Matemática Escolar (TO.MAT.E): 1º Ano dos Cursos Técnicos Integrados em Informática e Mecatrônica" desenvolvido nos últimos anos (2019-2021) no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus Presidente Epitácio (IFSP/PEP). No decorrer do período considerado, o projeto obteve fomento por meio da Coordenadoria Sociopedagógica do IFSP/PEP, junto ao programa institucional Bolsa Ensino. O recurso financeiro obtivo é direcionado ao pagamento de bolsas a estudantes para atuarem como monitores da disciplina de Matemática. O objetivo central da ação é atender os estudantes que ingressam anualmente nos Cursos Técnicos Integrados em Informática e Mecatrônica do campus IFSP/PEP. A partir da realização de uma avaliação diagnóstica, os bolsistas fomentaram ações formativas com os discentes visando sanar as dificuldades encontradas. Compreendemos que essas ações colaboram com o rol de políticas públicas já implementadas pelo campus que visam minimizar os índices de retenção e evasão. Aliado a isso, entendemos que essa ação tem potencial para propiciar melhorias significativas no desempenho acadêmico dos estudantes, posto que nos referidos cursos, a abordagem de conceitos matemáticos é alta. Como resultados das ações desenvolvidas no decorrer do projeto, destacamos três pontos: (i) as contribuições para o processo formativo dos estudantes que atuam como bolsistas; (ii) a oportunidade de mitigar dúvidas a respeito dos conhecimentos matemáticos apresentados pelos estudantes ingressantes nos Cursos Técnicos Integrados e (iii) a potencialidade de colaborar para as políticas voltadas a melhoria dos índices de aprovação e diminuição do número de estudantes evadidos. Órgão de fomento financiador da pesquisa: Bolsa Ensino (IFSP) A dinâmica das atividades envolve atividades de ensino e pesquisa do campo da Educação Matemática. No período pré-pandemia, havia uma agenda semanal com horários específicos para o atendimento presencial aos estudantes. Ao retomarmos as atividades acadêmicas no formato remoto, em meados do segundo semestre de 2020, durante a pandemia, as monitorias foram realizadas virtualmente. Utilizamos o Discord, uma plataforma gratuita que permite a troca de mensagens de texto, áudio e vídeo. Essa escolha adveio de outras ações de monitoria em desenvolvimento no curso superior de Bacharelo em Ciência da Computação, do qual vários docentes também atuam nos Cursos Técnicos Integrados.