A EQUAÇÃO DE TERCEIRO GRAU

José Paulo Rodrigues da Silveira[1], Antonio da Silva Gomes Júnior[1], Eugenia Brunilda Opazo Uribe

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Campus de Três Lagoas. E-mail: josepapt@hotmail.com. [1]Bolsista do Grupo PET Conexões de Saberes – Matemática/CPTL/UFMS

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é apresentar os resultados de um estudo sobre a equação de terceiro grau, incluindo alguns dos aspectos históricos da busca de um método geral de resolução que, se estendeu por séculos. Inicialmente apresentamos, como exemplo motivador, para introduzir as equações de terceiro grau, um número cuja aparência é de número irracional, mas que, na realidade, pode ser verificado que se trata de um número inteiro. Em seguida fazemos a descrição do método de Cardano – Tartaglia para a resolução das equações de terceiro grau, utilizando notação moderna e com bastante detalhe. Finalmente apresentamos um exemplo de aplicação do método.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Equações, Equações de Terceiro Grau, Método de Cardano - Tartaglia

INTRODUÇÃO

Resolver equações de terceiro grau ou equações cúbicas não é uma tarefa tão simples quanto resolver equações quadráticas e a busca por um método geral de resolução para as equações de terceiro grau se estendeu por muitos séculos.

Os babilônios resolviam algumas equações cúbicas com a ajuda de tabelas que davam valores à combinação $n^3 + n^2$ para alguns valores inteiros de *n*. Arquimedes estudou uma equação cúbica e analisou condições quanto ao número de raízes positivas dela. A solução algébrica seria encontrada séculos depois. O primeiro matemático a desenvolver um método para resolver equações cúbicas foi Scipione del Ferro (cerca de 1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, mas não publicou a solução, ele a revelou a um dos seus alunos Antonio Maria Fior. Em 1545 Gerônimo Cardano (1501-1576) publica a Ars Magna, neste trabalho Cardano expõe um método de resolução para a equação cúbica e também para a equação quártica, mas esclarece que a solução da cúbica foi descoberta por Niccolo Tartaglia (cerca de 1500 -1557).

O objetivo do trabalho é apresentar os resultados de um estudo sobre a equação de terceiro grau e a história da busca do método de resolução. É apresentado o método de resolução conhecido como Cardano -Tartaglia para a equação de terceiro grau, utilizando notações modernas para facilitar a apresentação e discussão.

METODOLOGIA

Para o desenvolvimento do trabalho foi feita uma revisão bibliográfica que incluiu aspectos históricos sobre a busca de um método de solução para a equação de terceiro grau. Houve a necessidade da leitura e estudo de artigos que contém a descrição dos métodos e exemplos de aplicação, bem como de resolução de exercícios. O estudo e as atividades desenvolvidas foram avaliados através da apresentação de seminários de discussão.

RESULTADOS

Um Exemplo Motivador

Segundo Lima (1987) "A história da solução da equação de terceiro grau tem vários aspectos interessantes, em virtude dos quais ela se constitui num tópico atraente para estudo e discussão entre professores e alunos de Matemática". Carneiro no seu artigo Parece mas não é, na Revista do Professor de Matemática, apresenta o número

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}\,,$$

o qual tem aparência de um número irracional, mas usando uma calculadora científica com 8 decimais, encontramos $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=2,7320508$ e $\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}=-0,7320508$. Ao somar as duas parcelas encontramos como resultado $2,0000000$. Surge imediatamente a pergunta: houve aproximação? ou a resposta é exata? Neste último caso a resposta encontrada indicaria que, para nossa surpresa, o número dado é inteiro.

Para responder a estas perguntas, consideremos $a=10+\sqrt{108}$ e $b=10-\sqrt{108}$, assim

$$x=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\,.$$

Logo,

$$x^3=a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b\,,$$

ou ainda,

$$x^3=a+b+3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right),$$

donde

$$x^3=a+b+3\sqrt[3]{ab}x\,.$$

Como $a+b=20$ e $ab=-8$, temos que $\sqrt[3]{ab}=-2$ o que nos permite concluir que $x^3+6x-20$ e assim, x é uma raiz da equação

$$x^3+6x-20=0.$$

Sabemos, do Teorema das Raízes Racionais que, as possíveis raízes racionais do polinômio $x^3+6x-20$ terão a forma $\frac{a}{b}$, com $\frac{a}{b}$ irredutível e satisfazendo que *a* divide 20 e *b* divide 1. Assim, as possíveis raízes racionais do polinômio $x^3+6x-20$ serão $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$, por verificação direta encontramos que, $2^3+6\cdot2-20=0$ e assim, 2 é raiz de $x^3+6x-20$. Utilizamos a divisão de polinômios para procurar outras possíveis raízes reais, observamos que,

$$x^3+6x-20=(x-2)(x^2+2x+10)=(x-2)\left[(x+1)^2+9\right].$$

Como $(x+1)^2+9>0$ para todo número real, concluímos que $x=2$ é a única raiz real do polinômio $x^3+6x-20$. Portanto devemos ter $x=2$ ou,

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}=2.$$

Isto é, apesar da aparência, o número dado não é irracional e sim um número inteiro.

A Equação de Terceiro Grau e a Solução de Cardano - Tartaglia

A equação mais geral do terceiro grau é

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

Mas, como ela é equivalente à equação

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0,$$

basta considerarmos equações em que o coeficiente de x^3 é igual a 1, isto é equações da forma

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

Ao substituirmos $x = y - a/3$ na equação acima, ela é transformada em

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0,$$

ou ainda,

$$y^3 + (b - \frac{a^2}{3})y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0,$$

que é uma equação desprovida de termo do segundo grau. Portanto, é suficiente estudar as equações do terceiro grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Escrevemos $x = u + v$, com $u \neq 0$ e $v \neq 0$ a determinar. Podemos supor $x \neq 0$, o que significa que $q \neq 0$. Substituindo, obtemos

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0,$$

isto é,

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Portanto, teremos uma solução na forma $x = u + v$, se conseguirmos achar números u, v tais que

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad 3uv = -p \tag{1}$$

Elevando ao cubo na segunda igualdade, obtemos

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad u^3v^3 = -p^3/27, \tag{2}$$

que pode ser resolvido facilmente: achar u^3 e v^3 conhecendo a sua soma e seu produto significa que u^3 e v^3 são raízes da equação quadrática

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

Utilizando a fórmula clássica para resolver esta equação, obtemos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \ .$$

Consequentemente,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (3)$$

Assim, $x = u + v$, dado por (3) é uma raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Agora utilizaremos o método de Cardano - Tartaglia para estudar a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$, este é um dos exemplos retirados do livro de Álgebra de Leonard Euler, escrito em 1770 e apresentado por Lima (1987). Fazendo $x = u + v$, e $uv = -\frac{1}{3} \cdot (-6) = 2$ e substituindo na equação, temos,

$$(u+v)^3 - 6(u+v) - 9 = 0$$

ou

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 6(u+v) - 9 = 0 \ .$$

Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma,

$$u^3 + 3uv(u+v) + v^3 - 6(u+v) - 9 = 0 \ ,$$

como $u.v = 2$, podemos escrever

$$u^3 + 6(u+v) + v^3 - 6(u+v) - 9 = 0$$

que nos permite obter,

$$u^3 + v^3 - 9 = 0 \qquad (4)$$

e escrevendo v da forma $v = \frac{2}{u}$, podemos substituir estas condições na equação (4) para obter

$$u^3 + (\frac{2}{u})^3 - 9 = 0 .$$

que, pode ser reescrita como

$$u^6 - 9u^3 + 8 = 0 .$$

Fazendo a mudança de variável, $y = u^3$, obtemos a equação quadrática

$$y^2 - 9y + 8 = 0 ,$$

que pode ser facilmente resolvida, obtendo

$$y = 8 \quad \text{ou} \quad y = 1 .$$

Retornando à variável inicial *u*, temos que $u = \sqrt[3]{y}$, logo

$$u = 2 \quad \text{ou} \quad u = 1 .$$

Como $u.v = 2$, temos que se $u = 2$, então $v = 1$ e se $u = 1$, então $v = 2$. Em ambos os casos, como $x = u + v$, temos que a solução da equação proposta $x^3 - 6x - 9 = 0$ é $x = 3$.

DISCUSSÃO

O trabalho foi dedicado exclusivamente à apresentação de exemplos e o Método de Cardano – Tartaglia para a resolução da equação de terceiro grau, resolvidos com bastante detalhe, buscando a motivação para o estudo desta equação e o esclarecimento das idéias discutidas. A história da equação de terceiro grau é muito rica e existem outros métodos e outros exemplos interessantes que podem ser explorados em futuros trabalhos.

CONCLUSÕES

Estudar a história da equação de terceiro grau e a busca por um método geral de resolução oferece a oportunidade de desenvolver um trabalho algébrico rico, bem como de resolver problemas interessantes. Estes dois aspectos são muito importantes na formação de futuros professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

BASTOS, G. Resolução de Equações Algébricas por Radicais. MiniCurso 30, Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. 25 a 29 de Outubro de 2004. Universidade Federal da Bahia. Disponível em: <www.bienasbm.ufba.br/M30.pdf>. Consultado em: 03/09/2012.

BOYER, C.B. História da Matemática. 2ª. Ed. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

CARNEIRO, J.P. Equações Algébricas de Grau Maior que Dois: Assunto para o Ensino Médio? Revista do Professor de Matemática. No. 40. 1999.

CARNEIRO, J.P. Parece mas não é. Revista do Professor de Matemática.

FERREIRA, W.J. História das Soluções das Equações por meio de Radicais. Universidade Católica de Brasília. Disponível em: <www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22008/WellingtonJoseFerreira.pdf>. Consultado em: 03/09/2012.

LIMA, E.L. A Equação de Terceiro Grau. Revista Matemática Universitária No. 5. 1987.

MILIES, C.P. A Solução de Tartaglia para a Equação do Terceiro Grau. Revista do Professor de Matemática. No. 25. Sociedade Brasileira de Matemática. 1994.