ARTIGOS COMPLETOS

ENIGMAS LÓGICOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Jéssica Soares De Souza, Allan Edley Ramos De Andrade

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS. E-mail: soaresdesouza95@gmail.com

RESUMO - Ao ensinar lógica matemática normalmente acaba-se utilizando apenas de regras e normas, fazendo com que o aluno se sinta desmotivado. Considerando essa situação e a complexidade do assunto, propomos neste trabalho uma nova abordagem para ensinar e fixar a lógica matemática, o uso de enigmas lógicos. Enigmas permitem a utilização da lógica na sua resolução, deste modo no momento de resolvê-los se concebe a curiosidade que junto as regras da lógica guiam o aluno na busca pela solução; promovendo a fixação e interesse no conteúdo.
Palavras-chave: Lógica Matemática; Enigmas lógicos; Ensino-aprendizagem.

LOGICAL PUZZLES: A PROPOSAL FOR TEACHING MATHEMATICS

ABSTRACT - Teaching mathematical logic usually ends up using only rules and norms, making the student feel unmotivated. Considering this situation and the complexity of the subject, we propose in this work a new approach to teach and fix the mathematical logic, the use of logical puzzles. Puzzles allow the use of logic in its resolution, so at the timeto solve them is conceives the curiosity that together the rules of logic guide the student in the search for the solution; promoting the fixation and interest in the content.
Keywords: Mathematical Logic; Logic Puzzles; Teaching-learning.

1. INTRODUÇÃO

Lógica matemática é primordial dentro e fora da sala de aula, no ensino básico e no ensino superior; excepcionalmente nos cursos de Matemática, Filosofia, Sistemas de Informação e algumas Engenharias. A palavra lógica é também muito utilizada no dia-a-dia, normalmente sem que o interlocutor saiba o que de fato é a lógica. Exemplos de utilização cotidiana são: "é lógico que vai chover!", "isso não tem lógica alguma" e "você não está sendo lógico". Segundo (MACHADO, 2000) quando se usa estas expressões comumente nos referimos a algo fácil de justificar, que parece evidente ou baseado em intuição, mas nem sempre isso é suficiente para provar algo. O escasso conhecimento da lógica ocorre porque o assunto raramente figura na grade das escolas do Brasil. Os Parâmetros curriculares Nacionais (PCN) para o ensino fundamental (Brasil, 1997) e ensino médio (BRASIL, 2000) evidenciam que é papel da Matemática formar a capacidade intelectual, agilizar o raciocínio dedutivo e proporcionar ao aluno identificar situações em que se empregue esses conhecimentos no dia a dia, ou seja, fica a cargo da matemática trabalhar o raciocínio lógico dos alunos.

Em contrapartida, a lógica é tida por muitos como algo distante da matemática e da sala de aula, como aponta CAPELIN (2016) salientando o fato de não haver conteúdo específico sobre lógica na matriz curricular de Matemática. Assim é comum os profissionais tratarem questões de raciocínio lógico apenas como passatempo, deixando de lado seu papel relevante na resolução de problemas.

De acordo com SOUZA (2013) a lógica permeia todos os conteúdos, porém, não pertence a nenhum, motivo que leva a maioria dos professores a evitar o assunto, alguns por falta de conhecimento, outros por reconhecerem que a assunto é de difícil abordagem além de gerar pouco interesse nos alunos. Entretanto, diariamente é preciso defender um ponto de vista, argumentar a favor de algo ou mesmo provar um fato; essas são situações em que se emprega lógica no dia a dia.

Vem as claras a importância da lógica quando se presta concursos públicos, vestibulares e ao ingressar no ensino superior onde se trabalha questões de lógica com frequência e as dificuldades ficam nítidas. Este trabalho vem de encontro as dificuldades enfrentadas para ensinar e aprender lógica, mais especificamente o uso de tabela verdade e argumentação.

2. OBJETIVO

A motivação do presente trabalho é o alto índice de reprovação no conteúdo de lógica matemática, que faz parte do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul campus de Três Lagoas. O intuito é apresentar uma abordagem notável, original e "enigmática"; que possibilite a fixação de conteúdo além de motivar alunos e professores.

A proposta é a utilização de enigmas que desde a antiguidade são utilizados para exercitar o raciocínio, porém, com um apelo específico de maneira a auxiliar na fixação das regras da lógica. É importante ressaltar que existem inúmeros enigmas que podem ser resolvidos de maneiras variadas, neste estudo para chegar à solução dos enigmas são utilizados tabela verdade e argumentação.

3. METODOLOGIA

O trabalho é resultado de pesquisa teórica e prática realizado através de leitura, discussão de artigos e apresentação de seminários sob influência de VELASCO (2008) e VILELA (2009). Na análise foi considerada a proposta de resolver enigmas por meio de regras lógicas que otimizam a resolução e facilitam seu entendimento. Durante o estudo observou-se a possibilidade de criar variações dos enigmas que exigem aplicação de técnicas específicas da lógica matemática, gerando assim novas possibilidades de resoluções, promovendo a curiosidade e exibindo uma alternativa para o ensino de lógica, tabela verdade e argumentos lógicos.

4. DESENVOLVIMENTO

4.1. Lógica em tudo

Segundo SILVA (2007) os gregos são responsáveis por inserir o raciocínio lógico e as demonstrações na Matemática, mas a Lógica Formal como conhecemos surge com Aristóteles e teve grande relevância para obras como "Os elementos" de Euclides por conta de seu caráter dedutivo. Ainda de acordo com SILVA (2007) a lógica estuda a razão como instrumento da ciência ou meio de adquirir e possuir a verdade, onde o ato da razão é o ato de raciocinar, ou seja, um tipo de operação do pensamento que conecta racionalmente ideias para delas obter uma conclusão. A lógica caracteriza-se como um instrumento para pensar corretamente e tem como objeto a proposição que configura através da linguagem e critérios formulados pelo pensamento. Este instrumento é composto por normas e regras que o pensamento deve seguir para exprimir a verdade, logo é possível usá-los para verificar quando uma fala é verdadeira ou não.

Existe uma correlação entre a lógica e o raciocínio, a lógica nos dá as regras de um pensamento coerente e conciso enquanto raciocínio é o ato de pensar. Entretanto, sem as regras da lógica o ato de raciocinar pode não fazer sentido ou não chegar à conclusão nenhuma, por isso, quando se fala em raciocínio seu significado automaticamente é voltado para raciocínio lógico, raciocínio organizado para chegar a conclusões irrefutáveis. DRUK (1998) defende que a lógica é um tema com conotação interdisciplinar e que seu aprendizado se torna mais rico quando exposto nas conversas informais como em revistas, jornais e diversas disciplinas do currículo explicitando que não é objeto apenas da matemática, mas que deve estar conecto a todas as disciplinas essencialmente a língua materna, pois, a lógica necessita da escrita e da interpretação.

Dentro da matemática esses fundamentos são utilizados para que o aluno compreenda definições, demonstrações, teoremas e junto de conhecimentos preestabelecidos possa deduzir, argumentar, generalizar, refletir e verificar a veracidade das informações. Nos cursos de matemática e licenciatura em matemática é um assunto que antecede as demonstrações no intuito de preparar o aluno, que deve ser muito crítico ao realizar demonstrações, já que é preciso utilizar argumentos válidos e articular premissas que sustentem sua conclusão.

4.2. Enigmas lógicos e Meta-enigmas

Puzzle, desafio lógico, charada, quebra-cabeça e adivinhação, muitos são os nomes pelos quais conhecemos os enigmas. Segundo GORSKY (2013) a história dos enigmas é incerta ao dizer quando surgem, as fontes mais antigas são os papiros de Ahmes e Rhind compostos por problemas numéricos baseados em práticas cotidianas que datam aproximadamente de 1650 a.C. GORSKY (2013) ainda salienta que o enigma funciona como um letreiro indicando algo a ser analisado e considerado, e suas soluções são caracterizadas por imaginação, criatividade, conhecimento teórico, etc.

Enigmas podem existir em diversas áreas como, por exemplo, matemáticos, científicos, da história, da natureza, lógicos entre outros. Este estudo trata exclusivamente de enigmas lógicos que em sua grande maioria não necessita de conhecimentos específicos de matemática ou de qualquer área para chegar à solução, bastando apenas pensar para concluí-lo; entretanto, empregar regras da lógica otimiza a resolução.

Alguns exemplos de enigmas lógicos são o “Enigma de Sherazade”, “Os chineses e os Gorros” e o “Enigma do aniversário” que ganhou fama em 2015 após ser aplicado em uma olimpíada de conhecimentos em Singapura. Uma observação relevante quando se fala de enigmas é a existência de enigmas insolúveis (até o momento). Existem também enigmas conhecidos por trazer em seu enunciado uma nova charada, um exemplo é “*O Enigma de lógica mais difícil do mundo”*, que tem o seguinte enunciado:

“*Três deuses (ou gênios infalíveis) A, B, e C são denominados, em alguma ordem, Verus, Falsus e Aleatorius. Verus sempre diz a verdade, Falsus sempre diz falsidades, mas Aleatorius diz verdades ou falsidades de uma forma completamente aleatória. Sua tarefa é determinar as identidades de A, B, e C com três perguntas cujas respostas são do tipo sim ou não; cada questão deve ser colocada a exatamente um dos deuses. Os deuses entendem a sua língua, mas respondem a todas as questões em sua língua nativa, na qual as palavras para sim e não são da e ja, em alguma ordem. Você não sabe qual das palavras significa sim ou não (RAYMOND, 1978)”.*

4.3. Lógica por meio de Enigmas

Enigmas aguçam a curiosidade, promovem o raciocínio, reflexão e fixação de conhecimentos variados. Infelizmente não recebem grande importância no âmbito do ensino, são pouco explorados no ensino fundamental e básico e quase que esquecidos no ensino médio e superior. Este estudo expõe uma abordagem diferenciada para a lógica, que tem grande importância na matemática, filosofia e áreas da informática.

Lógica proposicional e argumentos lógicos são assuntos de difícil abordagem, pois, enquanto superficial a lógica acaba sendo facilmente entendida utilizando-se do bom-senso ou interpretação. Contudo, essa ciência possui premissas e regras que influenciam seus resultados como salienta (PINHEIRO, 2018). Em sua grande maioria os livros de lógica matemática ao tratar do conteúdo trazem definições e aplicações diretas, e os exercícios que seguem tem o mesmo formato dos exemplos permitindo resoluções automáticas. Considerando essa situação é exibido a seguir uma abordagem diferente para ajudar alunos e professores, aplicando tabela verdade e argumentação como ferramenta na resolução e simplificação de enigmas.

São apresentados dois enigmas para exemplificar a abordagem, o primeiro enigma composto por quatro problemas dentre eles duas variações de própria autoria. Utiliza-se análise de possibilidades e tabela verdade para solucionar o enigma “Uma Aventura de Alice” (SMULLYAN, 2000). O segundo enigma utiliza regras de argumentação e tabela verdade para solucionar uma das doze perguntas que compõe o enigma “A Dama ou o Tigre” (SMULLYAN, 2004).

4.3.1. Enigma: Uma aventura de Alice

“Alice, ao entrar na floresta, perdeu a noção dos dias da semana. O Leão e o Unicórnio eram duas estranhas criaturas que frequentavam a floresta. O Leão mentia às Segundas, Terças e Quartas-feiras, e falava a verdade nos outros dias da semana. O Unicórnio mentia às Quintas, Sextas e Sábados, mas falava a verdade nos outros dias da semana. ”

Tabela 1. Dias da semana

Dias da semana	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
Leão	M	M	M	V	V	V	V
Unicórnio	V	V	V	M	M	M	V

Fonte: Própria (2019)

Problema 1

"Um dia Alice encontrou o Leão e o Unicórnio descansando à sombra de uma árvore. Eles disseram:

(1) *Leão: Ontem foi um dos meus dias de mentir.*
(2) *Unicórnio: Ontem foi um dos meus dias de mentir.*

A partir dessas afirmações, Alice descobriu qual era o dia da semana. Qual era?"

Note que:

Da afirmação (1) se o Leão estiver falando a verdade pode ser quinta, sexta, sábado ou domingo. Porém, dessas a única fala verdadeira é dita na quinta. Se o Leão estiver mentindo pode ser segunda, terça ou quarta. Entretanto, a fala só é falsa se dita segunda.

Portando as únicas hipóteses válidas para o Leão são quinta e segunda.

De (2) se o Unicórnio estiver falando a verdade pode ser segunda, terça, quarta ou domingo. Porém, dessas a única fala verdadeira é dita no domingo. Se o Unicórnio estiver mentindo pode ser quinta, sexta ou sábado. Entretanto, a fala só é falsa se dita na quinta.

Portanto as únicas hipóteses validas para o Unicórnio é domingo ou quinta.

Juntando as informações das afirmações (1) e (2), o fato de terem sido ditas no mesmo dia e sabendo em quais dias cada personagem mente a conclusão é que as frases foram ditas na quinta.

Problema 2

Em outra ocasião Alice encontrou o Leão sozinho. Ele fez as seguintes afirmações:

(1) *Eu menti ontem.*
(2) *Eu mentirei daqui a 3 dias.*

Qual era o dia da semana?

Note que:

Da afirmação (1) se o leão estiver falando a verdade, é quinta-feira. Caso ele estiver mentindo pode ser segunda, terça ou quarta. Contudo, essa afirmação só terá valor lógico falso se dita na segunda.

Portanto, a afirmação (1) pode ser dita pelo leão na segunda como verdade ou na quinta como mentira.

Da afirmação (2) se o Leão estiver falando a verdade, pode ser sexta, sábado ou domingo, mas afirmação será falsa se dita na quinta. Se o Leão estiver mentindo pode ser segunda, terça ou quarta, pois, nestes dias a afirmação será uma falsidade.

Portanto a afirmação (2) pode ser dita pelo Leão na segunda, terça ou quarta como mentira e sexta, sábado ou domingo como verdade.

Juntando as informações das afirmações (1) e (2), o fato de terem sido ditas no mesmo dia e sabendo em quais dias o Leão mente a conclusão é que as frases foram ditas na segunda.

Problema 3 (variação da versão original)

Em qual dia da semana é possível o Unicórnio fazer as seguintes afirmações?

(1) *Eu menti ontem.*
(2) *Eu mentirei amanhã.*

Note que:

Da afirmação (1) se o Unicórnio estiver falando a verdade é domingo. Se ele estiver mentindo pode ser quinta, sexta ou sábado; mas essa afirmação só tem valor lógico falso na quinta.

Portanto, a afirmação (1) pode ser dita pelo Unicórnio no domingo como verdade ou quinta como mentira.

Da afirmação (2) se o Unicórnio estiver falando a verdade, pode ser segunda, terça, quarta ou domingo; mas terá valor lógico verdadeiro apenas na quarta. Se o Unicórnio estiver mentindo pode ser quinta, sexta ou sábado; mas destes o único dia que a afirmação terá valor lógico falso é sábado.

Logo a afirmação (2) pode ser dita pelo Unicórnio na quarta como verdade ou no sábado como mentira.

Juntando as informações das afirmações (1) e (2), o fato de terem sido ditas no mesmo dia e sabendo em quais dias o Unicórnio mente a conclusão é que as frases não podem ser ditas no mesmo dia.

Problema 4 (variação da versão original)

Em que dias da semana é possível o Leão fazer as afirmações (1) e (2), e em que dias da semana é possível o Unicórnio fazer as afirmações (3) e (4).

(1) *Eu menti ontem e eu mentirei amanhã.*
(2) *Se menti ontem, então mentirei de novo amanhã.*
(3) *Eu menti ontem ou eu mentirei amanhã.*
(4) *Menti ontem, se e somente se, mentirei amanhã.*

Utilizando interpretação e tabela verdade é possível chegar à conclusão. Cada uma das proposições compostas deve ser analisada com base nos conectivos lógicos que as compõe e a relação com as informações apresentadas pelo enigma.

(1) *Eu menti ontem e eu mentirei amanhã.*

A afirmação (1) é uma conjunção, e de acordo com sua tabela verdade basta que uma das componentes seja falsa para que a afirmação, seja falsa, como mostra a tabela 2.

Tomemos:

P: Eu menti ontem.
Q: Eu mentirei amanhã.

Tabela 2. Conjunção.

	P	Q	Q ^ P
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	F
4	F	F	F

Fonte: Própria (2019)

Na análise das tabelas 1 e 2 dado que o Leão mente as segundas, terças e quartas; como falsidade ele pode afirmar a proposição (1) na segunda ou quarta, pois, se dita na terça terá valor lógico verdadeiro.

Dado que ele diz a verdade as quintas, sextas, sábados e domingos; o Leão não pode afirmar a proposição, dia algum, uma vez que **P** e **Q** são ambas verdadeiras apenas nas terças, dia em que ele mente.

A conclusão é que o Leão só pode fazer esta afirmação segunda ou quarta, porém, como uma falsidade.

(2) Se menti ontem, então mentirei de novo amanhã.

Esta afirmação é uma condicional, e de acordo com sua tabela verdade apenas quando **P** for verdadeira e **Q** for falsa a afirmação é falsa, como mostra a tabela 3.

Tomemos:

P: Eu menti ontem.
Q: Eu mentirei amanhã.

Tabela 3. Condicional

	P	Q	Q → P
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

Fonte: Própria (2019)

Na análise das tabelas 1 e 3 dado que o Leão mente as segundas, terças e quartas; como uma falsidade ele pode afirmá-la apenas na quarta. Dado que ele fala a verdade as quintas, sextas, sábados e domingos; o Leão poderia afirmá-la sexta, sábado ou domingo como verdade, já que **P** será falsa e consequentemente a implicação será verdadeira. Já na quinta, **P** será verdadeira e **Q** será falsa, tornando a implicação falsa num dia que ele fala a verdade.

A conclusão é que o Leão pode afirmar a proposição quarta sendo uma falsidade e sexta, sábado ou domingo sendo uma verdade.

(3) Eu menti ontem ou eu mentirei amanhã.

Esta afirmação é uma disjunção, e de acordo com sua tabela verdade quando ambas as componentes forem falsas a afirmação é falsa, como mostra a tabela 4.

Tomemos:

P: Eu menti ontem.
Q: Eu mentirei amanhã.

Tabela 4. Disjunção

	P	Q	Q v P
1	V	V	V
2	V	F	V
3	F	V	V
4	F	F	F

Fonte: Própria (2019)

Na análise das tabelas 1 e 4 dado que o Unicórnio mente as quintas, sextas e sábados; como uma falsidade ele não pode afirmar esta proposição, dia algum. Dado que ele fala a verdade as segundas, terças, quartas e domingos; o Unicórnio pode afirmar a proposição quarta (pois, **Q** tem valor lógico verdadeiro) ou domingo (pois, **P** tem valor lógico verdadeiro).

A conclusão é que o Unicórnio só pode fazer esta a afirmação na quarta ou domingo sendo verdade; e dia algum sendo uma falsidade.

(4) Menti ontem, se e somente se, mentirei amanhã.

Esta afirmação é uma bicondicional, e de acordo com sua tabela verdade quando **P** e **Q** tiverem valores lógicos diferentes a proposição é falsa, como mostra a tabela 5.

Tomemos:

P: Eu menti ontem.
Q: Eu mentirei amanhã.

Tabela 5. Bicondicional

	P	Q	Q $\leftrightarrow$ P
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	F
4	F	F	V

Fonte: Própria (2019)

Na análise das tabelas 1 e 5 dado que o Unicórnio mente as quintas, sextas e sábados; como uma falsidade o Unicórnio pode afirmar a proposição quinta ou sábado, já que na quinta **P** será falsa e **Q** verdadeira e no sábado **P** será verdadeira e **Q** falsa, tornando a afirmação falsa num dia que ele fala a mentira. Dado que ele fala a verdade as segundas, terças, quartas e domingos; como uma verdade o Unicórnio poderá afirmar a proposição segunda ou terça, já que nesses dias **P** e **Q** são verdadeiras.

A conclusão é que o Unicórnio pode fazer a afirmação na segunda ou terça como verdade; e quinta ou sábado como falsidade.

4.3.2. Enigma: A Dama ou o Tigre.

"Em vez de dar ao prisioneiro três quartos para escolher, ele deu nove!

Como ele explicou, havia uma senhora em apenas um dos quartos; em cada um dos outros oito, ou havia um tigre, ou estaca vazio. E o rei acrescentou que a placa a porta da sala onde a dama estava contava a verdade; os sinais das portas de todos os quartos com tigres estavam mentindo; e os sinais das portas dos cômodos vazios podiam dizer a verdade, ou a mentira.

Estes são os sinais:

1) A senhora está em uma sala de número ímpar.
2) Este quarto está vazio.
3) O letreiro 5 está correto ou o letreiro 7 está errado.
4) O letreiro 1 está errado.
5) O letreiro 2 ou o letreiro 4 está certo.
6) O letreiro 6 está errado.
7) A senhora não está na sala 1.
8) Nesta sala existe um tigre e a sala 9 está vazia.
9) Nesta sala existe um tigre e o letreiro 6 está errado.

O prisioneiro estudou a situação por um longo tempo.

- O problema é insolúvel! Exclamou o prisioneiro. "Não há dados suficientes" Não é justo".

- Eu sei – o rei riu.

- Muito engraçado! Respondeu o prisioneiro. Venha, dê-me pelo menos uma pista decente: a sala 8 está vazia ou não?

O rei era decente o suficiente para dizer-lhe se o quarto 8 estava vazio ou não, e o prisioneiro estava então capaz de deduzir onde a dama estava. Em qual sala estava a dama?

Solução:

Note a importância das seguintes dicas:

a) Há apenas uma dama.
b) A placa no quarto da dama diz a verdade.
c) As placas nos quartos dos tigres dizem mentiras.
d) As placas nos quartos vazios podem ser verdadeiras ou falsas.

O prisioneiro pergunta ao rei se a sala 8 está vazia, caso a resposta do rei seja positiva, não é possível chegar a conclusão, pois:

O letreiro 8 diz: *"Nesta sala existe um tigre* ***e*** *a sala 9 está vazia".*

Tomando

P: *Nesta sala existe um tigre.*

Q: *A sala 9 está vazia.*

O letreiro 8 apresenta uma proposição composta com o conectivo **e**, se a sala 8 está vazia a proposição tem valor lógico falso. De acordo coma tabela verdade da conjunção para a proposição ser falsa as afirmações **P** e **Q** podem ser ambas falsas, **P** falsa e **Q** verdadeira ou **P** verdadeira e **Q** falsa. Deste modo não é possível se obter informação alguma, contudo consta que o prisioneiro chegou a uma solução, logo a resposta do rei foi negativa. Coma resposta do rei sendo "não" é possível chegar a uma conclusão.

Tabela 6. Conjunção

	P	Q	Q ^ P
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	F
4	F	F	F

Fonte: Própria (2019)

Sendo verdade que a sala está ocupada, esta pode conter um tigre ou a dama. Se está ocupada pela dama a proposição deve ser verdadeira como diz o rei, contudo, o letreiro diz que ali existe um tigre, deste modo a dama não poderia estar nesta sala. Então na sala 8 existe um tigre de fato, porém as proposições nas salas com tigres dizem falsidade e para a proposição ser falsa pela tabela verdade do conectivo **e** existem três possibilidades para que ela seja falsa, visto que já sabemos que **P** é verdadeira só nos resta **Q** falsa. A conclusão é que a sala 9 não está vazia.

Analisando agora o letreiro 9: "Nesta sala existe um tigre **e** o letreiro 6 é errado."
Tomando

P: *Nesta sala existe um tigre.*
Q: *O letreiro 6 é errado.*

Se é verdade que a sala está ocupada, esta pode conter um tigre ou a dama, como no caso anterior ela não pode estar ocupada pela dama. Sendo assim ali existe um tigre e o letreiro é falso, novamente pela tabela verdade da conjunção e sabendo que **P** é verdadeira temos que **Q** é falsa, ou seja, o letreiro 6 diz a verdade.

Sabendo que o letreiro 6 é verdadeiro, logo a proposição "O letreiro 3 esta errado" é verdade. Assim o letreiro 3 diz falsidade, porém, este letreiro apresenta uma proposição composta que deve ser analisada.

O letreiro 3 diz: "O letreiro 5 está correto **ou** o letreiro 7 está errado"
Tomando

P: O letreiro 5 está correto.
Q: O letreiro 7 está errado.

Sabendo que o letreiro 6 é verdadeiro, logo a proposição "O letreiro 3 esta errado" é verdade. Logo o letreiro 3 diz falsidade, porém, este letreiro apresenta uma proposição composta que deve ser analisada.

O letreiro 3 diz: "O letreiro 5 esta correto **ou** o letreiro 7 esta errado"
Tomando

P: *O letreiro 5 esta correto.*
Q: *O letreiro 7 esta errado.*

Tabela 7. Disjunção

	P	Q	Q v P
1	V	V	V
2	V	F	V
3	F	V	V
4	F	F	F

Fonte: Própria (2019)

Esta proposição composta é uma disjunção e de acordo com sua tabela verdade ela só será falsa quando **P** e **Q** forem ambas falsas, como mostra a tabela 7. Sabe-se que este letreiro diz falsidade logo o letreiro 5 diz falsidade e o 7 diz a verdade.

Além disso, como o letreiro 3 diz falsidade a dama não pode estar ali.
O letreiro 5 diz: "O letreiro 2 **ou** o letreiro 4 está certo"

P: O letreiro 2 está certo.
Q: O letreiro 4 está certo.

Esta proposição composta é uma disjunção, sendo assim para que ela seja falsa devemos ter **P** e **Q** ambas falsas assim como mostra a tabela 7. Sabendo que este letreiro diz falsidade, a conclusão é que o letreiro 2 e 4 são ambos falsos. Além disso, como o letreiro 5 é falso a dama não pode estar ali.

O letreiro 2 diz: "Este quarto é vazio"

Sabendo que o letreiro 2 diz falsidade, a conclusão é que a sala 2 não esta vazia e nesta sala há um tigre.

O letreiro 4 diz: "*O letreiro de 1 está errado*"

Sabendo que o letreiro 4 diz falsidade, a conclusão é que o letreiro 1 é verdadeiro e a dama não esta na sala 4.

O letreiro 7 diz: "*A senhora não está na sala 1*"

Sabendo que o letreiro 7é verdadeiro, a conclusão é que a dama não esta na sala 1.

Analisando letreiro por letreiro os únicos que dizem a verdade são o 1, 6 e 7.

Letreiro 1 diz: *A senhora está em uma sala de número ímpar.*

Letreiro 6 diz: "*O letreiro 3 esta errado*".

Letreiro 7 diz*: " A senhoranão está na sala 1".*

As informações mais relevantes agora são as do letreiro 1 e 7. Portanto, é fato que a dama esta numa sala de número ímpar e também é fato que ela não esta na sala 1. *Logo a solução do enigma é que a dama esta na sala 7.*

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A lógica é constante na vida cotidiana, se faz presente em desafios e situações confusas do dia a dia. Em muitas áreas a lógica é primordial embora sua utilização não seja evidente, no campo das ciências exatas as regras da lógica se apresentam mais imperativas, e por consequência a transmissão desse conhecimento se constrói de maneira complexa.

O principal resultado do trabalho é a resoluções dos enigmas com o uso de tabela verdade e argumentação, além da elaboração de variações dos enigmas originais fazendo apelo ao uso de regras específicas da lógica matemática. Assim o trabalho cumpre o objetivo de ser uma abordagem original e notável, uma vez que difere da abordagem tradicional que segue apenas exemplos dos livros didáticos. É importante ressaltar que a adoção desta abordagem requer um tempo a extra para a introdução do conceito de enigma, porém, em conjunto com o enigma é trabalhado a resolução de problemas tonando a abordagem ainda mais vantajosa. Os exemplos apresentados anteriormente fazem parte do material que está sendo desenvolvido com o propósito de auxiliar e facilitar a transmissão da lógica matemática. Composto por enigmas com níveis de dificuldade variados constituem este material "O enigma de lógica mais difícil do mundo", "Os chineses e seus gorros", "Enigma de Sherazade" entre outros.

Abordar assuntos de forma a gerar curiosidade é um meio facilitador de criar a discussão entre os envolvidos, principalmente dentro da matemática que é conhecida como uma matéria *difícil* pelos alunos. A ideia de estudar a solução do enigma vem para desafiar os envolvidos e testar seus conhecimentos, uma vez que isso pode ser feito por análises de possibilidades. Inserir a dúvida e dar meios para se solucionar o enigma mostra-se empolgante para alunos e professores, com base neste estudo pretende-se expandir o trabalho para uma oficina que em breve deve ganhar forma. Os conceitos de raciocínio lógico devem ser trabalhados e destacados desde suas definições iniciais visto que na falta destes criam-se lacunas no restante do processo de aprendizagem, desta forma estudar a solução de enigmas por meio de tabela verdade e argumentação é um caminho que o aluno trilha para chegar a uma solução que pode defender com base em definições.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abordagens diferenciadas são ferramentas que alunos e professores buscam na tentativa de efetivar o conhecimento transmitido, o presente trabalho nasce dessa necessidade e apresenta enigmas como método de abordagem da lógica. Explicitando a possibilidade de empregar enigmas no ensino de conectivos lógicos e argumentação. Os enigmas trazem um "mistério" a ser resolvido, e para resolver o mistério o aluno precisa colocar em prática seus conhecimentos de lógica, interpretação e muitos outros. A maior contribuição do trabalho é o interesse e curiosidade que gera não apenas nos alunos de exatas como também nas pessoas que visitam as exposições.

É significativa a diferença que existe entre enigmas e os exercícios propostos na maioria dos livros. Os enigmas não permitem solução direta, o conhecido "copiar colar" dificilmente pode ser empregado aqui; eles demandam mais que apenas definições requerem planejamento, isso caracteriza a resolução de enigmas como abordagem para o ensino de lógica.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 22 jul 2019.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio): Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC/SEF, 2000. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 22 jul 2019.

CAPELIN, Edinéia Tochetto. **O ensino da lógica na educação básica: uma pesquisa com professores sobre os conhecimentos e a aplicação da lógica na Rede Estadual de Ensino em um município do sudoeste do Paraná.** 2016. 98 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2016

Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. **Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura.** Diário Oficial da União, Brasília, 05 mar. 2002a, Seção 1, p. 15.

DRUK, Iole de Freitas. **A linguagem Lógica.** Revista do Professor de Matemática, 17, p. 10 – 18, 1998.

ENEM, **Exame Nacional do Ensino Médio.** Brasília, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2013.

GORSKY, Samir Bezerra. **A lógica e a metafísica dos enigmas: surpresa, espanto e informação**. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, SP, 2013.

MACHADO, Nílson José. **Lógica? É Lógico!** São Paulo: Scipione, 2000. (Coleção Vivendo a Matemática)

MACHADO, **Matemática e Língua Materna**. 5.ed. São Paulo, Cortez, 2001.

MOTHNER, I. 1985. Raymond Smullyan, in D. J. Albers and G. L. Alexanderson (editors), **Mathematical people: profiles and interviews** (Boston/Basel/Stuttgart, Birkhäuser), 299-307

PINHEIRO, José Geovane et al. PROPOSTAS DE ENSINO PARA LÓGICA PROPOSICIONAL– BICONDICIONAL. **Redin-Revista Educacional Interdisciplinar**, v. 7, n. 1, 2018.

RAYMOND, R. **What is the Name of This Book? Englewood Cliffs**, NJ.: Prentice Hall, 1978. 62, 76

SILVA, J. J. **Filosofias da Matemática**. São Paulo: Ed. da UNESP, 2007. 239 p.

SMULLYAN, Raymond M. **A dama ou o tigre?: e outros problemas lógicos**. J. Zahar, 2004

SMULLYAN, Raymond M. **O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das mil e uma noites à lógica moderna**. Jorge Zahar, 2008.

SOUZA, Natalia Galvão Simão de. **O ensino da lógica na educação básica.** 2013.

SMULLYAN, Raymond. **Alice no país dos enigmas.** Jorge Zahar, Rio de Janeiro, RJ, v. 6, 2000.

UFMS. **Projeto Político Pedagógico do Curso de Matemática - Licenciatura**. Três Lagoas: CPTL, 2019

VELASCO, P. N. Dos conteúdos lógicos propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais: algumas observações. **Cadernos de Pós-Graduação - Educação**, São Paulo, v. 7, 2008. https://doi.org/10.5585/cpg.v7n0.1922

VILELA, D.; DORTA, D. **Contribuições para compreender o que é desenvolver o raciocínio lógico dos alunos: estudo do livro *Alice no país das maravilhas*.** Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara, n. 4, 2009.

ESTUDO SOBRE A LOGÍSTICA REVERSA EM UMA INDÚSTRIA DE BENEFICIAMENTO DE COURO DA REGIÃO SUL DE LONDRINA – PR

Angela Cristina Gomes[1], Altamir Antonio Macarini[2]

Universidade do Oeste Paulista – UNOESTE, Centro Paula Souza - ETEC. E-mail: angelac_gomes@hotmail.com

RESUMO - Nos últimos anos, a conscientização sobre a preservação do meio ambiente vem aumentando independente do segmento, uma organização que deseja se consolidar no mercado atual não pode ser absortas as questões de produção de resíduos. Assim, a logística reversa é necessária, pois permite destinar de maneira correta os bens de pós-consumo. Este estudo foi realizado em uma empresa do ramo de couros localizada na região sul de Londrina-PR, observando a disposição de resíduos de couros denominados *Wet Blue*. Para tal, foram feitas coletas de dados por gravimetria e percebeu-se que o fator custo ainda é o implicador para melhoria do processo logístico.
Palavras-chave: Logística reversa; Resíduos; *Wet Blue*.

STUDY ON REVERSE LOGISTICS IN A LEATHER BENEFITING INDUSTRY IN THE SOUTHERN LONDON REGION – PR

ABSTRACT - In recent years, awareness of environmental preservation has been increasing regardless of the segment, an organization that wants to consolidate itself in the current market can not be absorbed the issues of waste production. Thus, reverse logistics is necessary as it allows the correct disposal of post-consumer goods. This study was carried out in a leather company located in the south region of Londrina-PR, observing the disposal of leather residues called Wet Blue. For this, data were collected by gravimetry and it was realized that the cost factor is still the implicator for improving the logistics process.
Keywords: Reverse logistic; Waste; Wet blue.

1. INTRODUÇÃO

Apesar da crença de que a logística seja algo recente, este sistema que consiste em analisar a maneira mais viável de estar alocando mercadorias e as transportando de maneira mais rápida e eficaz, é utilizado desde a idade média por líderes militares para transportar o armamento com maior eficiência, sendo desta forma associadas por muito tempo a atividade militar. Este panorama só conseguiu ser desmistificado após a Segunda Guerra Mundial, onde deixou de ser somente um método de planejamento para as batalhas e passou a abranger outros ramos da administração, destacando as tarefas de armazenagem, transporte e distribuição de bens de consumo.

A logística reversa entra como um melhoramento do processo, propiciando um correto destino aos bens de consumo, ou seja, destiná-los de maneira sustentável e correta para que não agridam ou maltratem o meio ambiente possibilitando a sua reutilização. Portanto, neste contexto, significa que os resíduos gerados na fabricação de todo e qualquer bem de consumo deve ter uma adequação correta, seja reutilizando-o quando possível e quando não, estes materiais devem ser transportados para locais apropriados, como por exemplo, aterros industriais controlados.

Deveras, quaisquer empresas podem utilizar a logística a seu benefício, não sendo diferentes as empresas que processam e beneficiam couros.

No Brasil, a produtividade de couro em 2018, permeou a 4ª posição no ranking mundial segundo o Instituto de Estudos para o Desenvolvimento Industrial (2018), ficando entre os cinco maiores produtores do setor coureiro no mundo. Apesar das oscilações decorrentes da economia brasileira, há cada vez mais estudos para melhoria do processo e aumento da produtividade, visto que apesar de diminuir as unidades fabris do ano de 2000 para a presente data, ocorreu um aumento da produtividade nacional comprovada pela posição no ranking mundial.

Em contra partida, esta atividade é uma das mais impactantes no quesito gerador de resíduos, produzindo resíduos sólidos, líquidos e gasosos, os quais, se não forem dispostos de maneira correta, podem entrar em contato com a água e o solo, trazendo riscos e doenças a saúde dos seres vivos, pois possuem altas concentrações de cromo, substância esta, utilizada no processo de curtimento que dará estabilidade a pele e impedirá o seu apodrecimento, entre outras substâncias que se descartada sem controle pode abalar o meio ambiente de forma irreparável.

Portanto, é de extrema importância definir técnicas eficientes para o tratamento e disposição final, que atuem relacionadas as políticas de gestão ambiental para que se atenda as normatizações vigentes, já que estas empresas são grandes geradores desses tipos de materiais. Infelizmente, uma parte das empresas brasileiras neste setor, possuem certa resistência quanto ao devido descarte e alocam sem muito critério os respectivos resíduos, visto que, o custo ainda é o fator determinante para a armazenagem e posterior descarte correto desse material.

2. OBJETIVO

Como a atividade logística permite analisar a maneira mais viável de estar alocando mercadorias e as transportando de maneira mais rápida e eficaz, a logística reversa tem justamente por objetivo, dar destino correto aos bens de consumo incluindo seus respectivos resíduos. Assim, mediante este cenário o presente estudo teve por intuito, analisar uma empresa de beneficiamento de couro da região sul da cidade de Londrina - PR, priorizando a destinação final de resíduos sólidos formados no processo de Semi-acabado, denominado de aparas de *Wet Blue*, através da mensuração por gravimetria e verificar as práticas de gerenciamento do resíduo em questão, no que difere reduzir riscos e impactos ao meio ambiente, além de evitar multas em decorrência de uma má procedência na destinação final de tal resíduo.

3. PERFIL DO SETOR

No ranking mundial de produtividade de peças de couro, o Brasil ocupou no ano de 2018 a quarta posição, segundo o Instituto de Estudos para o Desenvolvimento Industrial (2018), neste mesmo período, foram produzidas mais de 34 milhões de peças, valor superior ao ano de 2017 com 33.995.840, 2016 com 33.608.352 e 2015 com um total de 33.129.846 peças (INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA, 2019a; 2019b). Mesmo diante de tal crescente obteve queda em sua posição, já que em 2017 ocupava o segundo lugar em produtividade, porém, subiu no critério de maior exportador do produto, pois, em 2018 ocupou o terceiro lugar superando o quarto lugar do ano de 2017 (CENTRO DAS INDÚSTRIAS DE CURTUME DO BRASIL, 2017a; BRASIL, 2018, *online*).

Obstante a estes valores, Staviski (2010) e Scobar (2014) destacam que o Brasil possui apenas 8,6% do couro manufaturado pelos curtidores nacionais considerados como produto de alta qualidade, este número é ínfimo ainda mais se comparados aos 85% da produção dos Estados Unidos. Esta diferença ocorre em grande parte devido aos defeitos encontrados no couro bovino, cuja má condução nos tratos do rebanho (arranhões, pontas de parafusos e madeiras, cortes, quedas, má conservação dos caminhões e más condições das estradas brasileiras) interferem com 60% na qualidade do produto final. Apesar deste descaso o couro processado na etapa de semi-acabado, denominado nos curtumes como “crust” e acabado vem crescendo expressivamente no total das exportações.

Segundo a Associação dos Criadores de Mato Grosso do Sul (2011), no ano de 2011 foram abatidas mais de 44 milhões de cabeças de gado ao longo do ano, superando os 44 milhões de 2010 e os 43 milhões de 2009, porém, este valor sofreu uma drástica queda fechando o ano de 2016 com pouco mais de 29 milhões de cabeças, sendo um dos motivos para este resultado a instabilidade política brasileira vivenciada no respectivo período. Em 2018 ocorrera nova alteração deste cenário, crescendo 3,4%, com um total de 31,90 milhões de cabeças, superando os últimos três anos de queda (CENTRO DAS INDÚSTRIAS DE CURTUME DO BRASIL, 2017b; ISTOÉ, 2017; INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA, 2019).

Diante deste contexto, há o intuito de instalação de programas no Brasil para a melhoria desta matéria-prima e consequentemente do produto final, os quais abordam desde o melhor trato com os animais, transporte até o seu respectivo abate. Almeja-se uma elevação das vendas externas as quais atualmente somam o equivalente a US$ 2 bilhões por ano, conforme destaca o secretário de Relações Internacionais do Agronegócio, Odilson Ribeiro e Silva, “Temos um pontencial muito maior para exportar” (BRASIL, 2018, *online*).

O maior polo de curtumes do país ainda é o estado do Rio Grande do Sul, ficando em sequência São Paulo, Paraná, Ceará, Bahia, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Goiás, Minas Gerais e Pará, porém, São

Paulo é considerado o maior exportador. Já em 2012, o Brasil se manteve entre os maiores produtores de couro do mundo produzindo mais de R$ 6 bilhões, sendo equivalente a 0,29% do valor total da produção da indústria brasileira de transformação e em 2015 o setor movimentou mais de R$ 7 bilhões somente no quesito exportação, evidenciando um mercado que mesmo na crise expandiu. Sendo, ainda possivel destacar que se comparado o ano de 2016 com 2015, este ainda obteve um crescimento nas exportações de couro em 3,8% a mais que 2015, apesar do valores em montante exportado ter sofrido decréscimo e fechado com US$ 2,033 bilhões, reforça-se o panorama vivenciado, devido a instabilidade política brasileira e a flutuação cambial neste período. Em 2018, as exportações brasileiras de couro atingiram US$ 1,4 bilhão, valor 24% menor que no ano anterior, porém, não se pode negar que ainda sim é um setor que atua significativamente na economia brasileira (JUNIOR, 2015; CENTRO DAS INDÚSTRIAS DE CURTUME DO BRASIL, 2017b; ASSOCIAÇÃO DE INDÚSTRIA DE CURTUME DO RIO GRANDE DO SUL, 2019).

Se analisarmos a quantidade de curtumes em funcionamento nos dias atuais, verifica-se que ocorreu um decréscimo considerável, já que em 2000 haviam cerca de 450 curtumes (PACHECO, 2005), em 2015, 310 espalhados pelas cinco regiões do Brasil conforme declara Junior (2015) e 260 unidades atuantes no ano de 2019, porém, em contrapartida a produtividade aumentou, não deixando de destacar que são mais de 700 empresas ligadas a cadeia produtiva do couro (CENTRO DAS INDÚSTRIAS DE CURTUME DO BRASIL, 2017c; 2019).

Doravante, consegue-se perceber que este Setor pertence a uma cadeia produtiva de mudança e que há um crescimento significativo no Brasil, já que apesar da quantidade de curtumes ter diminuído o país ainda ocupa um lugar de destaque em sua produtividade.

4. PROCESSO DE FABRICAÇÃO DO COURO

O couro é uma pele animal que passou por processos de limpeza, estabilização e acabamento para confecção de calçados, vestuário, estofamentos automotivos e mobiliários, entre outros artigos (PACHECO, 2005).

Segundo Fornari (2007), os processos de transformação da pele em couro são baseados em três grandes etapas denominadas Ribeira, Curtimento e Acabamento, assim os curtumes são classificados de acordo com a realização parcial ou total dessas etapas.

As fábricas que processam o couro são denominadas "curtumes", os quais de acordo com Pacheco (2005) podem ser classificados em quatro categorias, sendo elas: Curtume Integrado, o qual realiza as etapas de transformação da pele em couro, desde a sua obtenção "*in natura*" ou salgada até o couro acabado; Curtume de "*Wet Blue*", este realiza as etapas de processamento, desde a pele "*in natura*" ou salgada até a etapa de curtimento ou descanso/enxugamento ou rebaixamento (FIGURA 1), sendo que a expressão *Wet Blue* é devido ao aspecto úmido e azulado que o curtimento ao cromo lhe proporciona. Este curtimento proporciona ao couro muitas características favoráveis como estabilidade à luz e ao calor, estabilidade hidrotérmica, resistências físicas superiores aos demais curtentes, ciclos curtos de produção, boas propriedades tintoriais, maciez, elasticidade, baixa massa específica, dentre outras (HOINACKI, MOREIRA E KIEFER, 1994). Devido a esse conjunto de qualidades tem-se que, atualmente, 90% dos processos mundiais de curtimento são realizados com sais de cromo, e, portanto, acredita-se que devido a tantas vantagens e a grande utilização, o curtimento com o cromo não será substituído totalmente nos próximos anos; Curtume de Semi-acabado, este utiliza como matéria-prima o couro em estado de *Wet Blue* e o transforma em couro semi-acabado, também conhecido como "*Crust*", o qual contempla as operações de acabamento molhado e pré-acabamento; Por fim o Curtume de Acabamento, o qual transforma o couro *Wet Blue* ou *Crust* em couro acabado;

Assim, pode-se dizer que o processo de transformação de peles de animais em couro, que pode ser considerada uma matéria-prima renovável, é determinado como subproduto da indústria da carne, podendo-se ainda dizer, que os curtumes prestam à sociedade um serviço importante de dar destino a um produto que poderia se tornar um resíduo se não fosse aproveitado, porém esta atividade industrial também gera seus resíduos e que se não tratados adequadamente são de grande impacto ambiental (NOGUEIRA, PEDROSA E GUIMARÃES, 2000).

Figura 1. Máquina rebaixadeira e resíduo "pó de *Wet Blue*"

Fonte: Os Autores (2019).

5. RESÍDUOS

Atualmente existe uma grande preocupação em destinar corretamente os bens de pós-consumo e pós-venda, esta ação vem devido às legislações pertinentes exigirem um posicionamento que tange a logística reversa, por conta da opressão da própria sociedade estão sendo elaboradas cada vez mais leis que restringem e buscam a diminuição de bens nocivos ao meio ambiente de maneira a responsabilizar seus fabricantes em todo o seu ciclo de vida dos produtos. Além de possibilitar a educação do consumidor para que sua preferência seja por produtos menos danosos ao meio ambiente.

Desta maneira a sociedade e o consumidor final vêm se conscientizando cada vez mais com o destino correto dos rejeitos, e se a organização a qual foi escolhida para efetuar suas compras está tomando medidas adequadas para destinar os seus resíduos, que de certa forma pode ser considerado como refugo. Assim, a questão ambiental e o termo "logística reversa" começaram a ser utilizados há pouco tempo, pois foi a partir da década de 80, que muitos países começaram a realizar movimentos ambientais para que surgissem as primeiras leis de regulamentação das atividades industriais no que diz respeito à poluição. Esta tendência no Brasil vem desde 1981 quando foi publicada a lei 6.938 1981 na qual institui o Sistema Nacional do Meio Ambiente (SISNAMA) responsável pela proteção e melhoria do meio ambiente, porém, o grande marco referente a leis que tangem a gestão ambiental de resíduos sólidos e a logística reversa aconteceram no ano de 2010 onde foi sancionada e regulamentada a Política Nacional dos Resíduos Sólidos (PNRS), após vinte e um anos de grandes discussões (GUARNIERI, 2011).

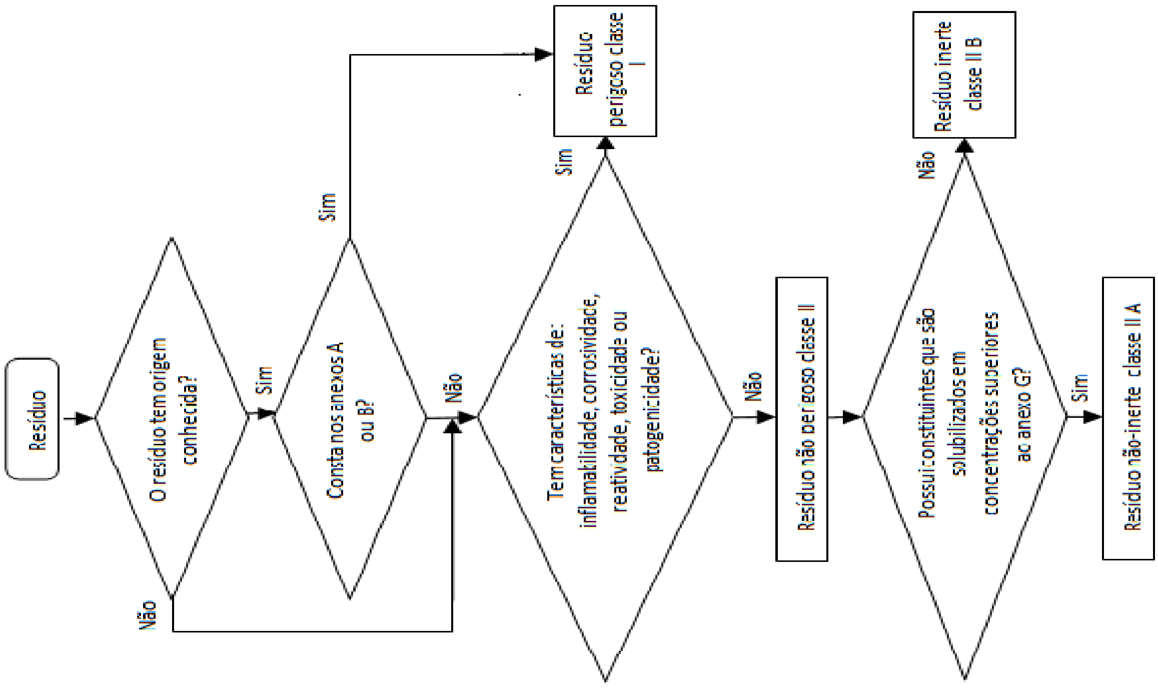
Ainda Guarnieri (2011) destaca que o PNRS é um mecanismo que foi criado com o intuito de promover a sustentabilidade das operações de resíduos sólidos preservando desta maneira o meio em que vivemos, proporcionando qualidade de vida da população e contribuindo com os aspectos sociais, econômicos e ambientais.

A Norma Brasileira Regulamentadora NBR10004: 2004 define resíduo sólido como sendo:

> Resíduos nos estados sólidos e semi-sólidos, que resultem de atividades de origem industrial, doméstica, hospitalar, comercial, agrícola, de serviços e de varrição. Ficam incluídos nesta definição os lodos provenientes de sistemas de tratamento de água, aqueles gerados em equipamentos e instalações de controle de poluição, bem como determinados líquido cujas particularidades tornem inviável o seu lançamento na rede pública de esgotos ou corpos de água, ou exijam para isso soluções técnica economicamente invariáveis em face à melhor tecnologia disponível. (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 10004, 2004, p. 1).

Na mesma norma é possível visualizar um fluxograma (FIGURA 2) que auxilia na caracterização e classificação de resíduos, após, esta definição é possível estabelecer onde e como devem ser direcionados os respectivos resíduos.

Figura 2. Caracterização e classificação de resíduos



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 10.004 (2004, p. vi).

Os resíduos obtidos na fabricação de couros são denominados ou como Resíduos Perigosos de Classe I ou Resíduos Não-Inertes de Classe II A, isso irá depender dos resultados das análises do resíduo em questão, ou seja, se este apresentar ou não as características de inflamabilidade, corrosividade, reatividade, toxicidade ou patogenicidade citadas no fluxograma da Figura 2.

5.1 RESÍDUOS *WET BLUE*

Como destacado, os Curtumes são divididos conforme suas atividades de processamento da pele, assim o processo seguinte ao curtimento é o rebaixamento, conforme demonstrado na Figura 1, esta etapa é utilizada para uniformizar a estrutura fibrilar (espessura) da pele curtida que deverá prevalecer no final do processo, por meio de rolos de facas. O resíduo gerado pela utilização das máquinas rebaixadeiras, é caracterizado como um pó azulado (FIGURA 1) (HOINACKI, MOREIRA E KIEFER, 1994). Para empresas que atuam como Curtume de *Wet Blue*, o resíduo sólido finaliza nesta etapa, já para os Curtumes de Semi-acabado ou "Crust" é necessário realizar uma "refila" das peças, para que não haja desperdício de insumo, pois essas "aparas" tendem a enroscar no maquinário, além de dar uma aparência ruim, descaracterizando a peça de couro, a Figura 3, demonstra o couro paletizado, após o processo de Refila.

Gomes, Silva e Konradt-Moraes (2010), definiram de acordo com os resultados obtidos em suas análises que os resíduos aparas ou pó de couro *Wet Blue* que lhe serviram de amostra deveriam ser destinados a aterros industriais Classe II A, devido aos resultados de solubilização, estarem em desacordo com os valores estabelecidos. Porém, cada resíduo mesmo sendo oriundo de empresas do mesmo ramo deve ser analisado para que somente após obter os resultados, ser designados ao destino correto.

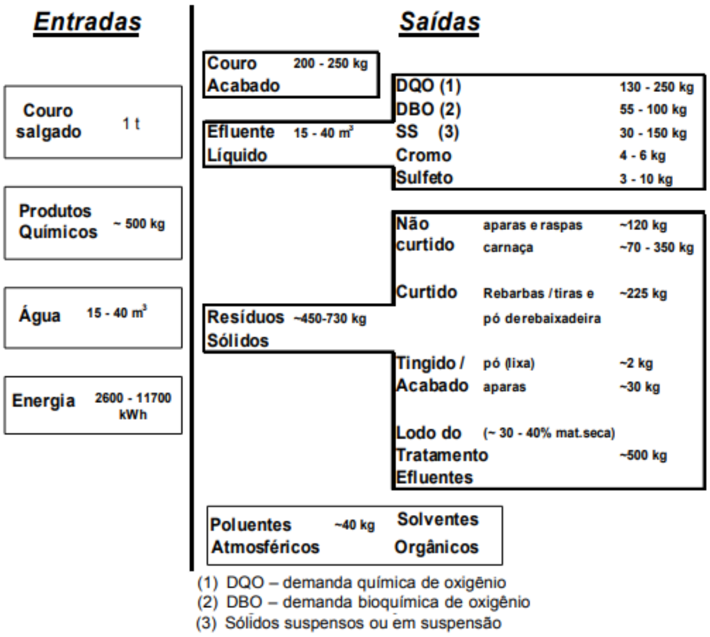
Figura 3. Paletização de couros *Wet Blue*

Fonte: Os Autores (2019).

5.2 RESÍDUOS *WET BLUE*

A Figura 4 destaca um balanço de massas básico, em quantidades médias com as principais entradas e saídas do processo produtivo convencional para couro bovino salgado, com curtimento ao cromo, até o produto final, ou seja, com base para uma tonelada de peles salgadas brutas. Assim, há geração de 200 a 250 kg de couros acabados, obtendo um rendimento médio de 22,5%, e em contrapartida há a emissão de resíduos sólidos, cerca de 600 kg, dos quais aproximadamente 225 kg são de rebarbas, tiras e pó de rebaixadeira (resíduo de *Wet Blue*), além de resíduos líquidos e gasosos (Pacheco 2005).

Figura 4. Balanço de massa no processamento de couro



Fonte: Adaptado de Pacheco (2005, p. 24).

6. LOGÍSTICA

Vaz e Maldonado (2017) comentam que a logística é uma atividade que remete a época das batalhas na Grécia antiga onde exércitos se deslocavam às grandes distâncias para o combate a fim de conquistar terras e riquezas, sendo assim, era necessário um determinado estudo do abastecimento das tropas para que não deixassem faltar alimentos, armamentos e medicamentos. Nesta época os combates eram praticamente autossuficientes e a arte de estudar combates foi mais tarde aprimorada por Napoleão e suas tropas.

Na história da humanidade a movimentação dos bens de consumo era feita totalmente de forma braçal, onde o homem só levava aquilo que ele conseguisse com sua força, com isso viviam em pequenas comunidades de onde retiravam seu próprio sustendo, suas comunidades eram autossustentáveis. Esse limitado sistema de transporte fazia com que as pessoas vivessem perto das fontes de produção e as limitavam ao consumo de uma escassa gama de mercadorias (BALLOU, 2006).

Quando se comenta sobre logística, a maioria das pessoas associa o termo logística a transporte, na maneira mais grosseira de ser, com carretas e caminhões, sendo que atualmente é muito fácil visualizarmos esse tipo de marketing estampados nos meios de transporte, porém, o termo logística não compreende somente a isso, mas, sim a algo mais amplo e de grande funcionalidade para o mercado atual. A logística é uma ferramenta de grande potencial para as organizações, pois é através desse processo que conseguimos organizar fluxos e demandas facilitando a entrega de pedidos, entregando-os em tempo hábil, logística nada mais é que a gestão da cadeia de suprimentos, avaliando e analisando todas as vertentes do processo produtivo encurtando processos e diminuindo custos.

Dentro da logística há um termo *supply chain* (cadeia de suprimentos) que é muito utilizado e o próprio nome já indica o seu significado, ou seja, gerir toda a cadeia de suprimentos, esse termo ao longo de seu surgimento vem se destacando, pois, há várias razões para que ele se torne popular no meio das grandes e pequenas organizações (SOUZA, CARVALHO E LIBOREIRO, 2006; BALLOU, 2006).

Atualmente ter um bom produto e entregá-lo em tempo hábil ao seu consumidor final não é mais um diferencial no mercado, mas sim, uma exigência que coloca a prova à produção e fechamento de novos pedidos. Os consumidores estão exigindo cada vez mais de seus fornecedores, com entregas mais rápida no tempo previsto e sem avarias, a cada exigência solicitada requer uma coordenação próxima de seus fornecedores e distribuidores, para que se possam atender suas expectativas. Ballou (2006), ainda comenta que a cadeia de suprimentos abrange todo o processo produtivo desde o estágio de obtenção da matéria-prima até o processamento do produto e entrega ao consumidor final, de fato que haja interatividade entre o fornecedor e o consumidor, com o objetivo de conquistar uma vantagem competitiva sustentável.

Dessarte, a competitividade esta cada vez maior, pois há uma gama de produtos muito parecidos no mercado onde diminui expressivamente a diferença dos produtos, assim, as organizações são obrigadas a se reinventar diariamente desenvolvendo todo tipo de serviço a seus clientes. Para que isso possa ocorrer de maneira efetiva às empresas devem reconhecer que, as relações mais próximas com seus clientes e fornecedores ajudam a ter melhor dinamismo para o sucesso empresarial, por sua vez, os gestores precisam identificar novos métodos de gerir e de agregar valor com o maior foco no cliente deixando de lado as formas convencionais que são de domínio comum e, portanto, deixam de ser diferenciadas (BETHLEM, 2004).

No sentido de atender as necessidades de níveis de serviço diferenciados ao cliente, a logística é um grande instrumento para se agregar valor por meio dos serviços que presta, sendo uma determinante que garante a posição competitiva das organizações contribuindo imensamente a sua sobrevivência no mercado. À medida que o mercado logístico é gerenciado de maneira correta e eficaz, ele consegue melhorar os níveis de serviços oferecidos, levando a organização a operar com menores custos e possibilitando a redução do preço de venda, concomitantemente consegue-se aumentar o valor percebido pelo cliente, dentro dessa visão os conceitos que antes eram organização de fluxos passam a abranger questões de estratégia, como, interação e integração, de negócios em toda a cadeia produtiva e a forma como cada parte do processo aperfeiçoara os recursos para coordenar as suas ações a fim de atingir de forma mais competitiva o consumidor final, diante desse cenário, a logística reversa vem como uma ferramenta que diferencia as empresas que lhe fazem uso, conquistando a maior credibilidade do consumidor (SANTOS, 2019).

6.1 LOGÍSTICA REVERSA

A logística reversa pode ser considerada como sendo uma visão contraria da convencional e como ela é conhecida. Porém, o planejamento reverso utiliza os mesmos processos que um planejamento convencional, pois ambos tratam dos níveis de serviço, armazenagem, estoque transporte fluxo de materiais e sistemas de informação deste modo à logística reversa deve ser encarada como um novo recurso de lucratividade onde a diferença fundamental esta entre a logística convencional e seu sistema reverso.

Leite (2003) e Ballou (2006) ressaltam que na cadeia logística natural os produtos são puxados enquanto na reversa há uma combinação entre “puxar e empurrar”, isto acontece, pois há uma legislação que aumenta a responsabilidade do produtor, os fluxos de logística reversa não divergem com o fluxo convencional. O fato é que a logística vem se destacando, por conta de seus recursos de aprimoramento e estudo do processo produtivo, assim como, um novo método competitivo para as organizações e neste contexto de tanta competitividade para diminuir custos e agilizar processos a fim de se tornarem mais aceitáveis no mercado de trabalho, destaca-se a logística reversa, a qual, também intuita ajudar a melhorar as condições de destino dos bens de consumo, e, portanto, agregar este importante diferencial. Ainda Leite (2003), explana que esse fator se torna diferencial na decisão de compra do consumidor, pois o fluxo reverso é originado a partir do descarte dos produtos ou dos seus materiais constituintes, quando sua utilidade é finalizada os produtos podem ser encaminhados à reciclagem, ao reuso ou a sistemas de destinação final, este último pode enquadrar sistemas de Aterros Industriais, conforme destaca a NBR10004 de 2004 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 10004, 2004).

Nos anos 80 a ideia de logística reversa era muito limitada e não se falava muito sobre o assunto, foi nos início dos anos 90 que este conceito começou a ganhar novas abordagens e foram introduzidas características que impulsionaram o aumento da preocupação com a questão ambiental. A pressão que os consumidores impuseram sobre o fornecedor, fez com que houvesse ações legais dos órgãos fiscalizadores. Além disso, as empresas passaram a ver a logística reversa como uma fonte de suma importância para a redução de seus custos, já que minimiza perdas de vendas e agrega valor ao produto, devido à nova abordagem ambiental (GUARNIERI, 2011).

Para Rogers e Tibben-Lembke (1999), a logística reversa é o processo de planejar, implementar e controlar a eficiência de custo efetivo do fluxo de matéria-prima, estoque de processo, produto acabado e suas respectivas informações, sendo, desde o ponto de consumo, onde o produto esta sendo consumido até o ponto de origem da matéria-prima, com o propósito de recapturar valor ou adequar o seu destino. Quando uma organização assume a responsabilidade de adotar essa consciência reversa ela deixa de perder e passa a ganhar, pois esta destinando seu fluxo da maneira mais correta e sustentável.

Vaz e Maldonado (2017) destacam que as operações de logísticas abrangem o fluxo de materiais que retornam ao cliente por algum motivo. A logística reversa é uma atividade muito ampla que esta inserida em todas as atividades do fluxo produtivo, ela deve envolver todas as operações relacionadas com a reutilização de produtos e materiais.

O conceito logístico cresceu abundantemente nos últimos tempos e a logística reversa esta com certeza mais inserida no atual mercado, pois, daqui para frente esta será levada em considerarão pelos consumidores finais. Atualmente a implantação do método reverso acontece para atender no que diz respeito à preservação do meio ambiente, tanto que vem se tornando umas das mais importantes decisões estratégicas dentro do crescente ambiente competitivo que se encontra presente nas organizações mais modernas, que vivem em constante busca por soluções que agreguem valor a seus consumidores finais.

A principal funcionalidade da logística reversa é a viabilização do retorno de bens através de sua recolocação no ciclo de produção ou de negócios e para que isso ocorra deve se ter uma análise dos bens de pós-venda e de pós-consumo com a intenção de definir o estado desses bens e determinar a qual processo deve ser submetidos, podendo os materiais retornar ao seu fornecedor ou podendo ser revendidos se ainda possuir condições adequadas de comercialização. Além disso, os bens podem ser recondicionados, ou reciclados desta maneira um produto somente deve ser descartado em último caso (VAZ E MALDONADO, 2017).

Assim, a logística reversa de pós-venda atua na área do equacionamento e operacionalização do fluxo físico e informação que corresponde aos bens de pós-venda, que pode ser sem uso ou com pouca utilização que por diferentes motivos acabam retornando aos diferentes partes da cadeia de distribuição direta da logística. Seu principal objetivo é agregar valor a um produto logístico que é desenvolvido por razões comerciais. Enquanto que, a logística de pós-consumo também equaciona e operacionaliza o fluxo, mas têm em vista os bens que são descartados pela sociedade que em geral retornam ao ciclo de negócios ou ao ciclo produtivo através de canais reversos específicos e caracterizam bens de pós-consumo, como os produtos em fim de vida útil ou usados com possibilidade de utilização e os resíduos industriais de maneira geral. Seu objetivo estratégico é de agregar valor a um produto logístico constituído por bens que ainda possuam condições de utilização, por produtos descartados por terem, de certa forma, atingido o fim de sua vida útil e por resíduos industriais podendo fluir por canais reversos como desmanche, reuso, reciclagem e ou até a destinação final (GUARNIERI, 2011).

Dentro de uma empresa de processamento de couros, cujo foco é o beneficiamento de couro a logística reversa pode e deve ser empregada na destinação correta dos bens de pós-consumo. Murugananthan, Blaskar e Prabhkar (2004) evidenciam que as atividades realizadas dentro do processo de beneficiamento de couro podem ser muito danosas ao meio ambiente, pois há uma geração significativa de resíduos líquidos, sólidos e gasosos.

7. PERFIL DA EMPRESA ESTUDADA

A empresa onde o presente estudo foi realizado localizava-se na região sul da cidade de Londrina-PR, com capacidade produtiva para 928.800 peças/ano, porém o seu volume girava entorno de 500.000 peças/ano de couro semi-acabado, ou seja, recebiam a matéria-prima em estado de *Wet Blue* (couro curtido ao cromo) e a processava até a etapa de *Crust* ou Acabado (em ambos são agregados cores e texturas variadas, que serão definidos pelo tipo de artigo manufaturado, ou seja, couro automotivo, moveleiro, calçadista, vestuário etc.), realizando assim, o seu beneficiamento. A referida empresa atuou no segmento de beneficiamento de couro (peles bovinas) na cidade de Londrina até setembro de 2018, quando encerrou suas atividades.

A capacidade produtiva girava entorno de 44 mil couros industrializados por semana, já que parte da matéria-prima (*Wet Blue*) era reclassificada e novamente comercializada, possuindo um quadro de mais ou menos 450 colaboradores.

8. PANORAMA DIAGNOSTICADO

O processo em tal empresa iniciava-se com a chegada de couros denominados *Wet Blue,* os quais eram divididos em uma máquina denominada Divisora (FIGURA 5), onde ocorria a separação paralela da parte superior, denominada “couro” da inferior, esta é denominada como raspa, onde sua base estava fixada a carne do animal.

Figura 5. Máquina divisora com saída de couro e raspa.

Fonte: Os Autores (2019).

A raspa após sua extração era armazenada em *pallets* e sua comercialização seguia sendo realizada através do peso, assim, era expresso em quilogramas (kg). Em seguida o couro gerado era submetido há um processo de limpeza denominado "Aparação", sendo esta atividade a que mais gerava resíduos sólidos na empresa estudada, ficando atrás somente do lodo gerado na Estação de Tratamento de Efluente (ETE), tal resíduo recebe o nome de "aparas de *Wet Blue"*.

Por conseguinte, após a formação de cada lote, ocorria o recolhimento dessas aparas, as mesmas eram pesadas determinando dessa forma, a quantidade gerada de resíduos ao dia, por semana e por mês.

Nesta etapa, foram obtidos os dados de forma semanal, totalizando um mês, conforme destaca a Tabela 1.

Tabela 1. Pesagem dos pallets com aparas de *Wet Blue*

Semana	Peso (kg)
1ª	1253,00
2ª	833,00
3ª	1002,00
4ª	919 ,00
Média/Semana	1001,75

Fonte: Os Autores (2019)

Observando os dados obtidos, foi possível verificar que a média de aparas/semanal nesta empresa girava entorno de 1000 kg, sendo o equivalente ao volume de dois *pallets* de aparas por semana, pois, a capacidade de cada *pallet* para esse tipo de material era de 500 kg, assim, havia um volume de oito *pallets* gerados, totalizando uma média de 4000 kg/ mês de aparas.

O material em questão foi considerado através de análises, resíduo Classe II A, devendo, portanto, ser direcionados a aterros controlados e não deveria ser aproveitado para outro fim devido as suas características químicas. Como o volume produzido fora bastante significativo, o mesmo ficava alocado em barracões na própria empresa e não havia uma rotina específica de envio, sendo este, enviado de acordo com critérios de avaliação visual do montante de resíduo e não de sua quantidade específica, além do fato que os pallets onde o mesmo era armazenado não eram específicos para resíduos, não sendo de contenção e, portanto, qualquer líquido percolado pelo mesmo poderia atingir o chão, continha conforme demonstra a Figura 6.

Outro fator analisado foi o tamanho de certos resíduos (aparas) que estavam misturados, conforme demonstra a Figura 6, quando questionado sobre o porquê da diferença, destacou-se apenas que como se trata de mão-de-obra braçal, cada operador "refila" com mais ou menos cuidado. Mediante tal situação, o volume produzido poderia ser bem menor, facilitando assim o descarte correto.

Figura 6. Alocação de resíduos aparas de *Wet Blue*

Fonte: Os Autores (2019)

A distância do Aterro Industrial mais próximo para este tipo de resíduo localizava-se em Apucarana-PR com 54 km, porém, a Indústria produtora do resíduo em questão enviava para outro aterro com aproximadamente 370 km de distância na cidade de Fazenda do Rio Grande - PR, o ideal seria a implantação de uma rotina de envio para que não ocupasse a parte da área física da empresa que não era destinada para recebimento e armazenamento de resíduos, implicando em até questões judiciais de multa perante possíveis fiscalizações de órgãos ambientais. E esta estrutura acabaria servindo de almoxarifado para o recebimento da própria matéria-prima *Wet Blue*. Diante desse cenário, o ideal seria inserir um cronograma de envio trimestral para que o volume de resíduo armazenado fosse o mínimo possível e desta forma realizasse melhor aproveitamento do espaço físico, evitando ainda possíveis acidentes, já que os mesmos são empilhados podendo até tombar (FIGURA 6). Esta prática é comum em algumas empresas desse seguimento, e nesta, a espera para envio do resíduo ao respectivo aterro chegava a ser de até 8 meses. Sobre o custo este, só seria minimizado se fosse instaurada uma rotina de treinamento para os colaboradores, para que se conscientizassem do problema que é a geração de resíduos que não podem ser reciclados ou reutilizados, sendo este um dos destaques da Lei n° 12.305 em seu artigo 49 (BRASIL, 2010, *online*). Assim, o valor ficaria entorno de R$ 4.331,00 por carga transportada onde seria acondicionado 12 toneladas de resíduos, ou seja, a quantidade armazenada em 3 meses. Outra necessidade cabível seria a aquisição de pallets com contenção para líquidos, pois assim não existiria o risco de contaminação.

Abreu (2006) evidencia que os resíduos contaminados com cromo são uma problemática de repercussão para as indústrias do ramo de curtume, citando ainda haver estudos que propõem a reciclagem do resíduo de cromo através de processos químicos de precipitação primária para posterior uso como pigmentos cerâmicos, porém, ainda não se tem nada autorizado pelos órgãos fiscalizadores, devendo ser realizadas mais pesquisas neste âmbito.

Uma simples ação poderia trazer melhor remanejamento de ambiente, melhorando o transito de empilhadeiras e facilitando o controle de destinação final do resíduo em questão, Rogers e Tibben-Lembke

(1999), evidenciam que quando uma organização assume a responsabilidade de adotar essa consciência reversa ela deixa de perder e passa a ganhar.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente, observa-se que a concepção logística dentro das empresas está evoluindo consideravelmente no que tange a parte do fluxo de produtos, qualidade na prestação de serviços e atendimento ao cliente. A utilização da logística pelos administradores faz com que possam ter maior controle e coordenação de formas coletivas de todas as atividades devido ao crescimento do mercado a fim de obter a otimização das operações envolvidas.

Porém, tendo em vista que a logística reversa surgiu para dar destino correto aos bens de consumo possibilitando a reutilização ou a disposição correta sem agredir o meio ambiente, percebeu-se que a empresa estudada não visualizava os conceitos de logística reversa, pois o quesito custo imediato suprimia a perspectiva de agregar valor ao produto por ser parceira do meio ambiente, o envio do referido resíduo ao seu destino correto, estava de acordo com a NBR 10004, porém, o acúmulo trazia riscos à operacionalidade das atividades, além do fato de perceber ausência de treinamentos o que gerava mais resíduos e consequentemente maior custo para disponibilização correta em Aterro Industrial.

Apesar da empresa estudada não estar atuando na referida localidade, há ainda na Região próxima a cidade de Londrina, treze empresas do ramo de um total de 18 empresas no estado do Paraná, se for comparado com o total de empresas curtumeiras no Brasil, representa 5% do total. Destacando assim, a relevância do estudo (GUIA BRASILEIRO DO COURO, 2019).

Ainda há uma estrada longa a trilhar para obter maior eficiência no processo de logística reversa em empresas deste setor, visto que o custo imediato ainda é o fator determinante para a resistência de inserção de novas técnicas.

REFERÊNCIAS

ABREU, Míriam Antônio de. Considerações Finais. *In:* **Reciclagem do resíduo de cromo da indústria do curtume como pigmentos cerâmicos.** 2006. 155 p. Dissertação (Doutorado em Engenharia de Materiais). Universidade de São Paulo – USP. São Paulo, 2006. f. 136 – 138.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Resíduos sólidos:** classificação. NBR 10004. p. 71. Rio de Janeiro: ABNT, 2004 p. vi – 1.

ASSOCIAÇÃO DOS CRIADORES DE MATO GROSSO DO SUL. **Setor de couros prevê elevar faturamento para US$ 3,8 bi. Notícia**. Notícias. 04 jan. 2011. Disponível em: http://www.acrissul.com.br/noticias/ver/2880/setor-de-couro-preve-elevar-faturamento-para-us-38-bi.html. Acesso em: 24 ago. 2019.

ASSOCIAÇÃO DE INDÚSTRIA DE CURTEME DO RIO GRANDE DO SUL. **Exportações de couro renderam US$ 1,4 bilhão em 2018**. Notícias. 11 jan. 2019. Disponível em: http://www.aicsul.com.br/exportacoes-de-couro-renderam-us-14-bilhao-em-2018. Acesso em: 22 jun. 2019.

BALLOU, Ronald H. **Gerenciamento da cadeia de suprimentos:** logística empresarial. 5ª Edição. Porto Alegre: Bookman, 2006. 25-34 p.

BETHLEM, Agrícola de Souza. **Estratégia empresarial:** conceitos, processos e administração estratégica. 5ª Edição. São Paulo: Atlas, 2004.

BRASIL – GOVERNO FEDERAL. **Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento/Notícias**. Setor de couro quer melhorar qualidade e aumentar exportações. Brasília: MAPA. 20 ago. 2018. Disponível em: http://www.agricultura.gov.br/noticias/setor-de-couro-que-melhorar-qualidade-e-aumentar-exportacoes. Acesso em: 20 jun. 2019. *online*.

BRASIL. Lei n° 12.305, de 2 de agosto de 2010: Institui a Política Nacional de Resíduos Sólidos; altera a Lei n° 9.605, de fevereiro de 1998, e dá outras providências. *online*.

CENTRO DAS INDÚSTRIAS DE CURTUME DO BRASIL. **Dados estatísticos:** rebanho de bovinos por países – top 30 (milhões de cabeças, excluindo búfalos). Guia Brasileiro do Couro. 2017a Disponível em: http://www.guiabrasileirodocouro.com.br/dados-estatisticos. Acesso em: 22 ago. 2019.

CENTRO DAS INDÚSTRIAS DE CURTUME DO BRASIL. **Veja o resultado final das exportações de couro em 2016**. Notícias. 09 jan. 2017b. Disponível em: http://www.cicb.org.br/cicb/noticias/veja-o-resultado-final-das-exportacoes-de-couro-em-2016. Acesso em: 22 ago. 2019.

CENTRO DAS INDÚSTRIAS DE CURTUME DO BRASIL. **A indústria.** Sobre. 2017c. Disponível em: http://www.cicb.org.br/cicb/sobre-couro. Acesso em: 20 jun. 2019.

CENTRO DAS INDÚSTRIAS DE CURTUME DO BRASIL. **O couro na economia do país e no comércio internacional**: e o papel determinante da apex-brasil neste cenário. Notícias. 11 Abr. 2019. Disponível em: http://www.cicb.org.br/cicb/noticias/o-couro-na-economia-do-pais-e-no-comercio-internacional-e-o-papel-determinante-da-apex-brasil-neste-cenario. Acesso em: 22 jun. 2019.

FORNARI, Marilda Menchon Tavares. Efluentes de curtumes. *In:* FORNARI, Marilda Menchon Tavares. **Aplicação da técnica de eletro-floculação no tratamento de efluentes de curtume**. 2007. 94 p. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química). Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Toledo, 2007. f. 6 -16.

GUIA BRASILEIRO DO COURO. **Curtumes.** 2019. Disponível em: htpp://www.guiabrasileirodocouro.com.br/busca?termo=. Acesso em: 28 ago. 2019.

GOMES, Angela Cristina; SILVA, José da; KONRADT-MORAES, Leila Cristina. **Caracterização de resíduo de curtume para determinação de disposição final.** Revista OMNIA – Suplemento, ISSN 1677-3942, Adamantina, v.13, n.1, 2010. Pag. 7.

GUARNIERI, Patrícia. **Logística reversa:** em busca do equilíbrio econômico e ambiental. 1ª Edição. Recife: Clube de Autores. 2011.

HOINACKI, E. ; MOREIRA, M. V.; KIEFER, C. G. **Manual básico de processamento de couro**. Porto Alegre: SENAI/RS, 1994.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Pesquisa trimestral do couro:** 1° trimestre 2019. SIDRA – Sistema IBGE de Recuperação Automática. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/home/couro/brasil. Acesso em: 18 jul. 2019a.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Séries históricas.** Agricultura, pecuária e outros. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/agricultura-e-pecuaria/9214-pesquisa-trimestral-do-couro.html?edicao=20752&t=series-historicas. Acesso em: 18 jul. 2019b.

INSTITUTO DE ESTUDOS PARA O DESENVOLVIMENTO INDUSTRIAL. **O encolhimento do Brasil na indústria mundial.** Análise IEDI, 21 set. 2018. Disponível em: https://www.iedi.org.br/artigos/top/analise/analise_iedi_20180921_industria_mundial.html. Acesso em: 22 jun. 2019.

ISTOÉ. Abate de bovinos recuou 3,2% em 2016, para 29,67 milhões de cabeças, revela IBGE. Agronegócio. Edição n° 2502 24.11. 15 mar. 2017. **Revista ISTOÉ.** Disponível em: https://istoe.com.br/abate-de-bovinos-recuou-32-em-2016-para-2967-milhoes-de-cabecas-revela-ibge/. Acesso em: 28 nov. 2017.

JUNIOR, Valter. Com mais de 300 curtumes o Brasil é um dos maiores produtores de couro do mundo, mercado que movimenta mais de 6 milhões por ano. Produção. 02 jul. 2015. **Revista Risa Brasil.** Edição 42. p. 28 -34. Disponível em: https://issuu.com/revistarisa/docs/componentes42. Acesso em: 22 ago. 2019.

LEITE, Paulo Roberto. **Logística reversa:** meio ambiente e competitividade. São Paulo: Ed. Prentice Hall, 2003.

MAHMOUD, A. El-Sheikh; HAZEM, I. Saleh; JOESEPH, R. Flora; MAHMOUD, R. AbdEl-Ghany. Biological tannery wastewater treatment using two stage UASB reactors. **Desalination**. 14 abr. 2011. p. 1 - 7. DOI: 10.1016.j.desal.2011.03.060. Acesso em: 26 ago. 2019.

MURUGANANTHAN, M.; BLASKAR, Raju G.; PRABHKAR, S. Separation of pollutants from tannery effluents by electro flotation**. Separation and Purification Technology**, 15 nov. 2004. V. 40, Issue 1. p. 69 – 75. DOI: 10.1016/seppur.2004.01.005. Acesso em: 27 abr. 2018. https://doi.org/10.1016/j.seppur.2004.01.005

NOGUEIRA, Carlos A.; PEDROSA, Fátima; GUIMARÃES, Joana. **Guia Técnico:** Sector dos Curtumes. INETI - Instituto Nacional de Engenharia e Tecnologia Industrial. Nov. 2000. Disponível em:< https://docplayer.com.br/56570964-Guia-tecnico-sector-dos-curtumes.html>. Acesso em: 24 ago. 2019.

PACHECO, José Wagner Faria. **Curtumes:** séries P+L. São Paulo: CETESB, 2005. p. 13 – 16.

ROGERS, Dale S.; TIBBEN-LEMBKE, Ronald S. **Going Backwards:** reverse logistics trends and practices. Reno, University of Nevada: 1999.

SANTOS, Asalberto Bertaggia dos. Logística: agregando valor ao produto. **IETEC,** 2019. Disponível em: <http://www.techoje.com.br/site/techoje/categoria/detalhe_artigo/305> Acesso em: 14 ago. 2019.

SOUZA, Gleim Dias de; CARVALHO, Maria do Socorro M. V. de; LIBOREIRO, Manuel Alejandro Martínez. Gestão da cadeia de suprimentos integrada à tecnologia da informação. **Rev. Adm. Pública**, Rio de Janeiro , v. 40, n. 4, p. 699-729, ago. 2006 . Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-76122006000400010&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 16 ago. 2019. https://doi.org/10.1590/S0034-76122006000400010

SCOBAR, Natália. Exportação de couro cresce. **Revista Pecuária Brasil**. Pecuária. 24 jul. 2014. Disponível em: http://www.revistapecuariabrasil.com.br/noticia/60-exportao-de-couro-cresce. Acesso em: 22 ago. 2019.

STAVISKI, Bernardo. Ainda Correndo atrás. **Revista da Abrafrigo.** Setor do Couro. Centro Cívico, n.4, p. 31-33, out. 2010.

VAZ, Caroline Rodrigues; MADONADO, Maurício Uriona. **Logística Reversa:** definições, conceitos e suas peculiaridades. 1ª Edição. Florianópolis: UFSC, 2017. 130 p. Disponível em: https://issuu.com/carolvaz6/docs/ebook_completo_logistica_reversa_20. Acesso em: 18 maio 2018.

TEOREMA DE EULER E SUAS APLICAÇÕES

Luiz Henrique de Lima Corrêa, Antonio Carlos Tamarozzi

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS. E-mail: luizhenrique.napoli@gmail.com, act.ufms@gmail.com

RESUMO - O Teorema de Euler é um resultado de impacto para a divisibilidade na Teoria dos Números Inteiros, devido a sua importância para a resolução de diversos problemas de congruências. O tema foi inserido como parte de um projeto de iniciação cientifica desenvolvido pelos autores, como umas das atividades do grupo PET Matemática pertencente ao Programa de Educação Tutorial da UFMS, Campus de Três Lagoas. Além do aprofundamento de estudos na Teoria dos Números, como um projeto de iniciação científica, o trabalho objetivou apresentar o tema gradativamente como extensão do "Pequeno Teorema de Fermat" e de forma acessível aos que estão iniciando um primeiro curso de Aritmética. No relatório final do trabalho é apresentado a avaliação do público participante que demonstra um crescimento de maturidade matemática ao abordarem problemas de congruências, bem como uma percepção satisfatória das técnicas desenvolvidas.
Palavras-chave: Divisibilidade; Sistemas de Resíduos; Congruências Lineares.

EULER'S THEOREM AND ITS APPLICATIONS

ABSTRACT - Euler's Theorem is an impact result for divisibility in the Theory of Whole Numbers, due to its importance for the resolution of several problems of congruences. The theme was inserted as part of a project of scientific initiation developed by the authors, as one of the activities of the group PET Mathematics belonging to the Program of Tutorial Education of UFMS, Campus of Três Lagoas. In addition to the deepening of studies in Number Theory as a project of scientific initiation, the work aimed to present the theme gradually as an extension of the "Little Theorem of Fermat" and accessible to those who are exploring a first course in Arithmetic. In the final report of the paper we present the participant audience evaluation that demonstrates a growth of mathematical maturity when addressing congruence problems, as well as a satisfactory perception of the developed techniques.
Keywords: Divisibility ; Waste Systems; Linear Congruences.

1. INTRODUÇÃO

Leonard Paul Euler (1707-1783) foi um matemático alemão que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha e que fez importantes contribuições em várias áreas da matemática, como cálculo e a teoria dos grafos. Na teoria dos Números, seu interesse pode ser atribuído ao estímulo de Christian Goldbach, durante os anos de convivência na Academia de São Petersburgo. No entanto, os primeiros trabalhos de Euler na Teoria dos Números foram influenciados pelas obras do matemático francês Pierre de Fermat, tanto que alguns resultados importantes descobertos por Fermat, como o Pequeno Teorema de Fermat e Teorema de Fermat em soma de dois quadrados, foram demonstrados por Euler.

Euler introduziu uma função definida em inteiros positivos, conhecida como a função ϕ de Euler, que tem a capacidade de generalizar os resultados do Pequeno Teorema de Fermat. Este resultado é de fundamental importância para a Aritmética, ao estabelecer que, se m é um inteiro positivo e a é um inteiro positivo coprimo com m, então:

$$a^{\Phi(m)} \equiv 1 \bmod m. \qquad (*)$$

Observa-se que a expressão $a \equiv b \bmod m$ significa que a e b encontram-se na mesma classe de congruência módulo m, ou seja, que ambos deixam o mesmo resto se os dividirmos por m, ou, o que é equivalente, a - b é um múltiplo de m.

O Pequeno Teorema de Fermat mencionado acima, assegura que "Se p é um número primo e a é qualquer inteiro, então

$$a^p \equiv a \bmod p\text{"},$$

que por si próprio é um fato de grande importância para a divisibilidade nos números inteiros.

Embora, tenha este nome, o Pequeno Teorema de Fermat, possibilita grandes aplicações práticas para resolução ou estabelecimento de congruências, conforme se apresenta neste trabalho. Com efeito, grande parte destas aplicações decorre da seguinte formulação equivalente que o Pequeno Teorema adquire: "Se p é um número primo e a é um inteiro coprimo com p, então

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p".$$

Conforme se destaca neste trabalho, esta versão do Teorema possibilita a análise de números grandes mediante sua redução a números congruentes.

A limitação de aplicações com números com expoentes dependentes de um primo p, como também a limitação de congruências módulo p, impulsionou Euler a tratar a congruência acima módulo um inteiro positivo m arbitrário. Contraexemplos óbvios mostram que o expoente não poderia ser simplesmente m - 1. Surge então uma das principais funções na Teoria dos Números chamada função ϕ de Euler que possibilita a congruência (*), uma extensão do Pequeno Teorema de Fermat para n relativamente primo com a. De fato, trata-se de uma extensão, porque $\varphi(p) = p - 1$, quando p é primo, tendo em vista que Euler descobriu que, para um inteiro m positivo arbitrário, o valor $\varphi(m)$ representa o número de inteiros entre 1 e m que são coprimos em relação a m.

Este presente artigo tem como objetivo o aprimoramento dos métodos aritméticos com base em congruências, além disso, apresentar o Pequeno Teorema de Fermat e Teorema de Euler e algumas de suas aplicações na Teoria dos Números.

2. METODOLOGIA

O trabalho é resultado de uma pesquisa teórica, desenvolvida através de discussões do tema com o orientador e apresentações de seminários como parte das atividades do programa PET – Matemática no estudo de introdução à Teoria dos Números.

A realização deste trabalho a partir de métodos rotineiros de investigação cientifica da área, propiciou a inserção dos alunos do PET (Programa de Educação Tutorial) comprometidos na pesquisa Matemática, através do desenvolvimento de ferramentas introdutórias para a Teoria dos Números e, em consequência, a ramos importantes da Matemática.

Esse conjunto de atividades realizadas inclui uma etapa de leitura e resoluções de exercícios. O estudo e as atividades desenvolvidas foram avaliados através da apresentação de seminários de discussões. Inclui ainda o preparo de textos com a abordagem do tema de modo acessível a alunos que já tiveram contato prévio com técnicas introdutórias de divisibilidade e congruências e a avaliação do publico participante.

Em termos técnicos, o assunto foi explorado utilizando técnicas básicas da divisibilidade e congruências, cuja abordagem segue basicamente (HEFEZ, 2006) e (DOMINGOS et al., 2003).

A demonstração do principal resultado (Teorema de Euler) foi obtida através da noção de sistemas de resíduos (SANTOS, 2009).

Neste presente artigo utiliza-se a notação $(a,b) = 1$ para denotar o máximo divisor comum dos números inteiros a e b.

3. RESULTADOS

Esse trabalho inicia com a abordagem do Pequeno Teorema de Fermat, que é um caso particular do Teorema de Euler explorado neste trabalho.

Pequeno Teorema de Fermat

Teorema: Sejam $p,a \in Z$ com p primo e $(a,p) = 1$. Então

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p.$$

A demonstração deste teorema pode ser consultada em (SANTOS, 2009) e será omitida, uma vez que se apresenta neste trabalho um direcionamento para a demonstração do Teorema de Euler que o abrange.

A seguinte versão do Teorema de Fermat é bastante utilizada e não exige a condição de a ser relativamente primo com p. Sua demonstração é consequência imediata da primeira versão:

Teorema: Sejam $p,a \in Z$ com p primo, então

$$a^p \equiv a \bmod p.$$

Apresentamos na sequencia algumas aplicações onde são exploradas as técnicas possibilitadas pelo Pequeno Teorema de Fermat.

1) A soma $2^{50} + 3^{50}$ resulta em um número divisível por 13. Observemos inicialmente que

$$2^{50} = 2^{4 \cdot 12+2} = (2^{12})^4 \cdot 2^2 \text{ e}$$
$$3^{50} = 3^{4 \cdot 12+2} = (3^{12})^4 \cdot 3^2$$

Assim, aplicando a primeira versão do teorema de Fermat com *p* = 3 e *a* = 2 e *a* = 3, tem-se,

$$2^{50} \equiv 2^2 \ (\text{mod } 13)$$
$$3^{50} \equiv 3^2 \ (\text{mod } 13)$$

Portando $2^{50} + 3^{50}$ é congruente a $2^2 + 3^2 = 13$, ou seja, é divisível por 13.

2) Nesta aplicação vamos encontrar o resto da divisão do número 2^{100000} por 17.

Tem-se que 17 é primo e não divide 2, então pelo Pequeno Teorema de Fermat

$$2^{16} \equiv 1 \ (\text{mod } 17),$$

mas 100 000 = (6250) (16), assim sendo temos

$$2^{100000} = [(2^{16})^{6250}] \ \equiv \ 1^{6250} \ (\text{mod } 17)$$

Logo, tem-se pelo Pequeno Teorema de Fermat que o resto da divisão de

$$2^{10000} \text{ por 17 é 1.}$$

3) Vamos mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, é natural o número:

$$\frac{3}{5}n^5 + \frac{2}{3}n^3 + \frac{11}{15}n \, .$$

Podemos efetuar a seguinte simplificação da expressão dada:

$$\frac{3}{5}n^5 - \frac{3}{5}n + \frac{3}{5}n + \frac{2}{3}n^3 - \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}n + \frac{11}{15}n$$
$$= \frac{3}{5}n^5 - \frac{3}{5}n + \frac{2}{3}n^3 - \frac{2}{3}n + \frac{11+9+10}{15}n$$
$$= \frac{3}{5}(n^5 - n) + \frac{2}{3}(n^3 - n) + 2n \ (*)$$

Tem-se pelo Pequeno Teorema de Fermat que $n^5 - n$ é divisível por 5, ou seja $n^5 \equiv n$ (mod 5) e $n^3 - n$ é divisível por 3, ou seja $n^3 \equiv n$ (mod 3). Assim existem $a, b \in \mathbb{N}$., tais que $n^3 - n = 3a$ e $n^3 - n = 3b$, logo substituindo em (*) implica que:

$$\frac{3}{5}n^5 - \frac{3}{5}n + \frac{3}{5}n + \frac{2}{3}n^3 - \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}n + \frac{11}{15}n =$$
$$\frac{3}{5}(n^5 - n) + \frac{2}{3}(n^3 - n) + 2n =$$
$$\frac{3}{5}5a + \frac{2}{3}3b + 2n =$$
$$3a + 2b + 2n,$$

o que mostra ser a expressão dada inicialmente, um número inteiro.

4) Pode-se verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $3n^5 + 5n^3 + 7n$ é múltiplo de 15.

Tem-se que $15 = 3 \cdot 5$, e como (3,5) = 1 é suficiente provar que $3n^5 + 5n^3 + 7n$ *é* divisível por 3 e 5, o que será feito nos seguintes itens.

a) Tem-se que $3n^5 + 5n^3 + 7n = 3n^5 - 3n + 3n + 5n^3 + 7n = 3n^5 - 3n + 5n^3 + 10n$ e o resultado se aplica com o Pequeno Teorema de Fermat para as expressões $3n^5 - 3n$ e $5n^3 + 10$.

b) $3n^5 + 5n^3 + 7n = 3n^5 + 5n^3 - 5n + 5n + 7n = 3n^5 + 5n^3 - 5n + 12n = 3n^5 + 12n + 5n^3 - 5n.$

Tem-se que $5n^3 - 5n$ é divisível por 3*,* porque, $3 | n^3 - n$ (pelo Pequeno Teorema de Fermat). Dado que $3 | 3n^5 + 12n$ é imediato, segue que 3 também divide a soma, ou seja, $3 | 3n^5 + 5n^3 + 7n.$

Portanto $15 | 3n^5 + 5n^3 + 7n.$

5) Seja $n \in \mathbb{N}$ tais que $5 \nmid n$, $5 \nmid n - 1$, e $5 \nmid n + 1$, então $5 | n^2 + 1$.

Tem-se que $5 \nmid n$, mas pelo Pequeno Teorema de Fermat $5 | n^4 - 1$, mas

$$n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n^2 - 1) =$$
$$= (n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)$$

Como se sabe 5 é primo, $5 \nmid n - 1$ e $5 \nmid n + 1$, segue que $5 | n^2 + 1$.

6) Se $7 \nmid n$, $7 \nmid n - 1$, $7 \nmid n^3 + 1$, então $7 | n^2 + n + 1$.
Tem-se que $7 \nmid n$, mas pelo Pequeno Teorema de Fermat $7 | n^6 - 1$, logo

$$n^6 - 1 = (n^3 + 1)(n^3 - 1) =$$
$$= (n - 1)(n + n^2 + 1)(n^3 + 1)$$

Como se sabe 7 é primo, $7 \nmid (n - 1)$ e $7 \nmid (n^3 + 1)$ segue que $7 | n^2 + n + 1$.

7) Provar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, o número $n^{13} - n$ é divisível por 2, 3, 5, 7, 13 e 273.
Da definição de congruência $n^p \equiv n \pmod p$ tem-se que $p | n^p - n$.
Tem-se que 273 é fatorável pelos primos distintos 3,7 e 13; assim boa parte do trabalho consiste em mostrar que 3,7 e 13 dividem $n^{13} - n$. Vamos observar os seguintes itens:

a) $2 | n^{13} - n$

$$n^{13} - n = n(n^{12} - 1)$$
$$= n(n^6 - 1)(n^6 + 1)$$
$$= n(n^6 + 1)(n^3 - 1)(n^3 + 1)$$
$$= n(n^6 + 1)(n^3 + 1)(n - 1)(n + n^2 + 1).$$

E segue imediatamente o resultado

b) $3 | n^{13} - n$

$$n^{13} - n = n(n^{12} - 1)$$
$$= n(n^6 - 1)(n^6 + 1)$$
$$= n(n^6 + 1)(n^2 - 1)(n^4 + n^2 + 1).$$

Assim pelo Pequeno Teorema de Fermat tem-se que $n^2 \equiv 1 \pmod 3 \Longrightarrow 3 | n^2 - 1$.
Logo

$$3 | n^{13} - n.$$

c) $5 | n^{13} - n$.

$n^{13} - n = n(n^{12} - 1)$
$\quad = n(n^4 - 1)(n^8 + n^4 + 1)$.

Assim pelo Pequeno Teorema de Fermat se tem que $n^4 \equiv 1 \pmod 5 \Longrightarrow 5 | n^4 - 1$.
Logo

$$5 | n^{13} - n.$$

d) $7 | n^{13} - n$.

$$n^{13} - n = n(n^{12} - 1)$$
$$= n(n^6 - 1)(n^6 + 1).$$

Assim pelo Pequeno Teorema de Fermat se tem que $n^6 \equiv 1 \pmod 7 \Longrightarrow 7 | n^6 - 1$.
Logo

$$7 | n^{13} - n.$$

e) $13 \,\big|\, n^{13} - n$.
Essa é uma aplicação direta do Pequeno Teorema de Fermat.

f) $273 \,\big|\, n^{13} - n$.

Tem-se 273 é fatorável por 3, 7, e 13, que são primos, logo por b), d) e e) se tem que

$$273 \mid n^{13} - n.$$

Teorema de Euler

Introduzimos inicialmente as definições base necessárias para explorarmos o Teorema de Euler.

Sistema completo de resíduos

Definição: Seja m ≥ 2, um inteiro. Um sistema completo de resíduos módulo *m* é qualquer lista de inteiros $a_1,..., a_m$, dois a dois incongruentes módulo *m*.

Equivalentemente, o resto da divisão dos a_i*'s* por *m* são os números 0, 1,..., *m* - 1*,* sem repetições, embora possam estar em ordem qualquer.

Sistema reduzido de resíduos

Definição: Um sistema reduzido de resíduos módulo *m* é qualquer lista de inteiros $r_1,\dots, r_m$, tais que:

i. $(r_i, m) = 1, \forall\, i = 1,..., s$;
ii. $r_i \neq r_j \mod m$, se $i \neq j$;
iii. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ primo com *m*, tem-se que $n \equiv r_j \mod m$ para algum $i = 1,...s$.

Pode-se ilustrar as definições acima através dos seguintes exemplos:

1) A sequência 0,1,2,3,4 forma um sistema completo de resíduos módulo 5. Enquanto que a lista 1,2,3,4 é um sistema reduzido de resíduos módulo 5.
2) A sequência 0,1,2,3,4,5,6,7 forma um sistema completo de resíduos módulo 8 e 1,3,5,7 é um sistema reduzido de resíduos módulo 8.
3) A sequência 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 forma um sistema completo de resíduos módulo 10. Portanto, 1,3,7,9 é um sistema reduzido de resíduos módulo 10.
4) Tem-se que 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 forma um sistema completo de resíduos módulo 12 e 1,5,7,11 é um sistema reduzido de resíduos módulo 12.

A função φ de Euler

Definição: A função $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, onde* φ(*m*) corresponde ao número de naturais entre 0 e *m* − 1 que são primos com *m,* é chamada de função ϕ de Euler. Por convenção é estabelecido que $\phi(1) = 1$.

Observa-se que, de acordo com esta definição, quaisquer dois sistemas reduzidos de resíduos módulo *m* têm o mesmo número de elementos, que corresponde a φ(*m*) elementos.

Exemplos:

1) $\phi(4) = 2$
2) $\phi(5) = 4$
3) $\phi(6) = 2$
4) $\phi(7) = 6$
5) $\phi(8) = 4$
6) $\phi(9) = 6$
7) $\phi(11) = 10$

Propriedades da função φ de Euler

Proposição: Se *p* é primo então φ(*p*) = *p* – 1.

Demonstração:

De fato, se *p* é primo então o sistema reduzido módulo *p* é formado por1, 2,…, *p* – 1, e portanto

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Assim,

$\phi(p) = |\{x \in \mathbb{N} / x < p, mdc(x, p) = 1\}| = |\{x \in \mathbb{N} / x < p, p \nmid x\}| = p - |\{x \in \mathbb{N} / x < p, x / p\}| = p - 1.$

Proposição: Se *p* é primo então

$$\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^e\left(1 - \frac{1}{p}\right). \qquad \textbf{(*)}$$

Demonstração:

Utiliza-se a proposição anterior, para mostrar que, se *p* é primo, então,

$\varphi(p^e) = |\{x \in \mathbb{N} / x < p^e, mdc(x,p^e) = 1\}| = |\{x \in \mathbb{N} / x < p^e, mdc(x, p) = 1\}| = |\{x \in \mathbb{N} / x < p^e, p \nmid x\}| = p^e - |\{x \in \mathbb{N} / x < p^e, p \,/\, x\}| = p^e - p^{e-1}$.

A seguinte proposição é auxiliar para a obtenção do Teorema de Euler, sua demonstração pode ser encontrada em (SANTOS, 2009).

Proposição: Se *mdc* (*m.n*) = 1 então $\phi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$. **(**)**

O teorema seguinte permite uma expressão para a função φ .

Teorema: Seja $m > 1$ um número natural e $m = {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_n}^{\alpha_n}$ sua decomposição primária. Então $\varphi(m) = {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_n}^{\alpha_n}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$.

Demonstração:

Seja $m = {p_1}^{\alpha_1}.{p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_n}^{\alpha_n}$ onde *pi, i = 1,...,n,* são primos distintos então $\varphi(m) = \phi({p_1}^{\alpha_1}.{p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_n}^{\alpha_n})$. Agora como eles são primos entre si, segue pela proposição **(**)** que $\varphi(m) = \varphi({p_1}^{\alpha_1}).\varphi({p_2}^{\alpha_2}) \ldots \phi({p_n}^{\alpha_n})$ e assim aplica-se a proposição **(*)** se tem que,

$$\varphi(m) = {p_1}^{\alpha_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right).{p_2}^{\alpha_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right) \ldots$$

$$\ldots {p_n}^{\alpha_n}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$

e portanto

$$\varphi(m) = = {p_1}^{\alpha_1}.{p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_n}^{\alpha_n}\left[\left(1-\frac{1}{p_1}\right).\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\right].$$

Teorema de Euler

Sejam *m,a* ∈ ℕ, com *m > 1 e* primo com *a,* então $a^{\phi(m)} \equiv 1 \bmod m$.

Demonstração: Seja $r_1, \ldots, r_{\varphi(m)}$ um sistema reduzido de resíduos módulo *m*. Então multiplicando por *a* cada um dos números desta lista temos $ar_1, \ldots, ar_{\varphi(m)}$ também é um sistema reduzido de resíduos módulo *m*.

Logo, $ar_1 \ldots ar_{\phi(m)} \equiv r_1 \ldots r_{\phi(m)} \bmod m$ e assim

$$a^{\phi(m)} \cdot r_1 \ldots r_{\varphi(m)} \equiv r_1 \ldots r_{\varphi(m)} \bmod m.$$

Portanto $a^{\phi(m)} \equiv 1 \bmod m$.

Corolário: Se $m > 1$, $k \geq 0$, $n \geq 0$ e *a* um inteiro qualquer são tais que, mdc(*a*,*m*) = 1 e $k \equiv n \pmod{\phi(m)}$ então, $a^k \equiv a^n \pmod m$.

Com o trabalho de pesquisa, foi explorado também algumas aplicações do Teorema de Euler :

1) Determinação dos possíveis restos da divisão de a^{100} por 125, onde *a* é inteiro.

i. Temos $\phi(125) = \phi(5^3) = 5^3\left(1-\frac{1}{5}\right) = 5^3 - 5^2 = 100$, se (*a*, 125) = 1 então pelo Teorema de Euler.

Tem-se,

$$a^{100} \equiv 1 \bmod 125$$

ii. Se (*a*, 125) ≠ 1 então 5/*a* , ou seja, $a = 5^k b$ com (5,*b*) = 1 , assim $a^{100} = 5^{100k} \cdot b^{100} \equiv 5^{100k} \bmod 125$.

Como $5^{100} = 5^3 \cdot 5^{97} \equiv 0 \bmod 125 \rightarrow 5^{100k} \equiv 0 \bmod 125$.

Portanto, os possíveis restos são 0 e 1.

2) Determinar o resto da divisão de 3^{2014} por 28.

Sabe-se que, $3^{\phi(28)} \equiv 1 \bmod 28$

Como $\phi(28) = \phi(2^2 \cdot 7) = \phi(2^2) \cdot \phi(7) = 2^2 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot 6 = 2 \cdot 6 = 12$.

Tem-se,

$$3^{12} \equiv 1 \bmod 28$$

Portanto,

$$3^{2004} = (3^{12})^{167} \equiv 1 \bmod 28$$

$$\rightarrow 3^{2014} = 3^{2004} \cdot 3^{10} \equiv 3^{10} \equiv 25 \bmod 28$$

Assim tem-se que o resto da divisão de 3^{2014} por 28 é 25.

3) Pode-se determinar os algarismos da dezena e da unidade do número 7^{999999}.

Pelo Teorema de Euler sabe-se que $7^{\phi(100)} \equiv 1 \bmod 100$. Agora, calculando-se $\phi(100) = \phi(4 \cdot 25) = \phi(4) \cdot \phi(25) = \phi(2^2) \cdot \phi(5^2) = (2^2 - 2^1) \cdot (5^2 - 5^1) = 40$

Tem-se,

$$7^{40} \equiv 1 \bmod 100$$

Como,

$$7^{40} = 7^4 \cdot 7^{10} \equiv 1 \bmod 100$$
$$\rightarrow 7^4 \equiv 1 \bmod 100$$

Tem-se, 999999 = 4 · 249999 + 3. Então:

$$(7^4)^{249999} \cdot 7^3 \equiv 1 \cdot 7^3 \equiv 43 \bmod 100$$

Logo os dois últimos dígitos são 43.

4) Achar o resto da divisão de 3^{100} por 34.

Pelo Teorema de Euler sabe-se que $3^{\phi(34)} \equiv 1 \bmod 34$.

Calculando-se $\phi(34) = \phi(2 \cdot 17) = \phi(2) \cdot \phi(17) = 1 \cdot 16 = 16$

Assim,

$$3^{16} \equiv 1 \bmod 34.$$

Logo como 100 = 16 · 6 + 4, tem-se:

$3^{100} = 3^{16 \cdot 6 + 4} = (3^{16})^6 \cdot 3^4$

Portanto,

$$(3^{16})^6 \equiv 1 \bmod 34$$
$$\rightarrow (3^{16})^6 \cdot 3^4 \equiv 1 \cdot 3^4 \equiv 13 \bmod 34$$

Logo, o resto da divisão de 3^{100} por 34 é 13.

5) Ache os 3 últimos dígitos de 7^{9999}.

É o mesmo que achar o resto da divisão de 9999 por 1000. Então se analisa a congruência de 9999 módulo 1000.

Pelo Teorema de Euler, $a^{\phi(m)} \equiv 1 \bmod m$. Logo,

$7^{\phi(1000)} \equiv 1 \bmod 1000$

Então:

$\phi(1000) = \phi(2^3 \cdot 5^3) = 2^{3-1}5^{3-1}(2-1)(5-1) = 400$.

Assim, $7^{400} \equiv 1 \bmod 1000$. Tem-se que 9999 = 10000 − 1. Se fosse elevado a 10000, seria fácil, pois 10000 = 25 · 400. Se fizer como se fosse 10000.

$(7^{400})^{25} = 7^{10000} \equiv 1 \bmod 1000$. Mas não se pode dividir 1 por 7 para chegar no 9999. Entretanto, temos que:

1001 = 7 · 143 ≡ 1 mod 1000. Daí, como (7,1000) = 1:

$7^{9999} \cdot 7 \equiv 7 \cdot 143 \bmod 1000 \Leftrightarrow$

$7^{9999} \equiv 143 \bmod 1000$.

Logo os últimos 3 dígitos são 143.

6) Sejam *a = 5, m = 6, k = 8 e n = 2.* Tem-se $\phi(6) = 2$, *e 8 ≡ 2 (*mod *2).* Como $5^2 \equiv 1$ (mod *6),* então $5^8 \equiv 1$ (mod *6)* e desta forma, $5^8 \equiv 5^2$(mod *6).*

7) Mostre que existem infinitos números da forma 20000...009 que são múltiplos de 2009.

O problema é equivalente a encontrar infinitos naturais *k* tais que

$2 \cdot 10^k + 9 \equiv 0 \pmod{2009} \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 10^k + 9 \equiv 2009 \pmod{2009} \Leftrightarrow \quad 10^{k-3} \equiv 1 \pmod{2009}$

pois 2000 é invertível módulo 2009.

Como mdc(10,2009) = 1 pelo Teorema de Euler tem-se que

$$10^{\phi(2009)} \equiv 1 \pmod{2009} \Longrightarrow$$
$$10^{\phi(2009)t} \equiv 1 \pmod{2009}$$

Para todo $t \in \mathbb{N}$.

Logo basta tomar $k = \phi(2009)t + 3$.

8) Encontre um número $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n > 10^{2000}$ e 2^n tenha entre suas 2000 últimas casa decimais pelo menos 1000 zeros consecutivos.

Solução: Sabe-se que $2^{\phi(5^{2000})} \equiv 1 \pmod{5^{2000}}$ pelo Teorema de|Euler.
Portanto existe $b \in \mathbb{N}$ com

$$2^{\phi(5^{2000})} = 5^{2000}b + 1 \Longrightarrow$$
$$2^{2000+\phi(5^{2000})} = 10^{2000}b + 2^{2000}.$$

Portanto os 2000 últimos dígitos de $2^{2000+\phi(5^{2000})}$ coincidem com a representação decimal de 2^{2000}, que tem no máximo 667 dígitos pois $2^{2000} < (2^3)^{667} < 10^{667}$. Desta forma, há pelo menos 2000 – 667 = 1333 zeros consecutivos dentre as 2000 últimas casas decimais de $2^{2000+\phi(5^{2000})}$ e assim $n = \phi(5^{2000}) + 2000 = 4 \cdot 5^{2000} + 2000$ satisfaz as condições do enunciado.

9) Mostre que não existe inteiro x tal que $103 \mid x^3 - 2$.

Solução: Note primeiramente que 103 é primo. Agora suponha que $x^3 \equiv 2 \pmod{103}$, de modo que $103 \nmid x$. Elevando ambos os lados desta congruência a (103 − 1)/3 = 34, obtém-se $x^{102} \equiv 2^{34} \pmod{103}$ e sabe-se pelo Teorema de Euler que $x^{102} \equiv 1 \pmod{103}$. Por outro lado observa-se que $2^{34} \equiv 46 \pmod{103}$, uma contradição.
Logo não existe um inteiro x tal que $x^3 - 2$ é divisível por 103.

4. DISCUSSÃO

Ao longo do trabalho foram estudadas congruências e divisibilidade sob a ótica do Teorema de Euler. A partir deste resultado obtém-se apresentações de problemas de Aritmética com maior elegância e precisão, além de possibilitar generalizações importantes.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho o Teorema de Euler foi apresentado como extensão requerida do Pequeno Teorema de Fermat. Além dos resultados práticos para a determinação de algumas congruências, as aplicações, de ambos os resultados, foram exploradas com o objetivo de mostrar a necessidade natural desta extensão. As técnicas utilizadas são acessíveis aos estudantes que dominam princípios da Teoria dos Números, de modo que a abordagem pode servir de estimulo para o prosseguimento dos estudos na área.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao FNDE pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

DOMINGOS, H. e IEZZI, G. Álgebra Moderna. São Paulo: Editora Moderna, 2003.

DOMINGUES, HYGINO H.; IEZZI, G. Fundamentos de aritmética, São Paulo, Atual Editora LTDA, 1999.

HEFEZ, Abramo. Elementos de Aritmética. 2 ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2006. Iv, 169. (textos universitários).Aritmética, A. Hefez, Coleção PROFMAT

SANTOS, José Plínio O. Introdução à teoria dos números. 3ª edição Rio de Janeiro: IMPA 2009. (Coleção Matemática Universitária).

TEORIA DE GRAFOS: ENCONTRANDO O MENOR CAMINHO PARA PERCORRER OS CAMPUS DA UFMS

Mariana Laura Da Cruz Da Costa, Fernando Pereira de Souza

Universidade Federal de Mato Grosso Do Sul – UFMS. E-mail: marilaura65@gmail.com

RESUMO - A Teoria dos Grafos estuda objetos combinatórios, que é um bom modelo para muitos problemas em Matemática, Informática, Engenharia e Indústria. Os problemas de caminhos mais curtos são fundamentais e frequentes quando se estudam problemas em redes, por exemplo, de transportes. Neste trabalho, é proposto uma abordagem para a resolução de problemas de caminhos mais curtos, o objetivo é estudar o menor caminho para percorrer todos os campus da UFMS, para alcançar o resultado desejado, faremos o uso dos algoritmos dos mínimos sucessivos, da ordenação do peso das arestas e uma comparação entre os resultados.
Palavras-chave: Grafos; Otimização; Matemática Aplicada;

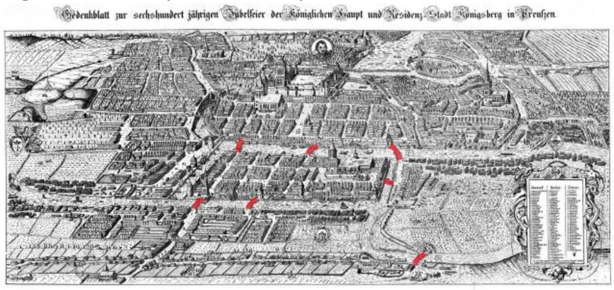
GRAPH THEORY: FINDING THE SHORTEST WAY TO GO THROUGH UFMS CAMPUS

ABSTRACT - Graph theory studies combinatorial objects, which is a good model for many problems in mathematics, computing, engineering, and industry. Problems with shorter paths are fundamental and frequent when studying network problems, for example, transport. This work proposes an approach to solve shortest path problems, the objective is to study the shortest way to go through all the UFMS campuses, to achieve the desired result, we will use the successive minimum algorithms, the ordering of the edge weight and a comparison of the results.
Keywords: Graphs; Optimization; Aplicated Math.

1. INTRODUÇÃO

Acredita-se que um dos primeiros exemplos da utilização de grafos teria surgido com o estudo de Leonardo Euler sobre o problema das Pontes de Königsberg. Na cidade de Königsberg, na Alemanha, havia um rio que cortava o município em quatro partes e para interliga-las, existiam sete pontes, como podemos observá-las na Figura 1. O problema consistia em passar por estas sete pontes, de forma que não houvesse repetição. Para mostrar que não era possível, Euler fundou uma área da Matemática que se chama Teoria dos Grafos.

Figura 1. Cidade de Königsberg, em destaque as sete pontes.



Fonte: NOGUEIRA, 2015.

A Teoria dos Grafos permite, de forma simples e contextualizada, a construção das ideias básicas que permeiam os processos algorítmicos, além de ser uma área riquíssima em aplicações, as quais nos remetem a problemas realmente contextualizados.

É importante ressaltar que a teoria dos grafos, independentemente das aplicações importantes e variadas, é fonte de um grande número de problemas atraentes, complexos e de simples enunciados. Desta forma, o objetivo deste trabalho consiste em responder o seguinte problema:

O Reitor da UFMS deseja visitar todos os Campus da Universidade. Procura-se determinar qual o percurso mais econômico, tendo em atenção, exclusivamente, as distâncias quilométricas entre os Campus. Para isso, devemos analisar o mapa exposto na Figura 2.

Figura 2. Mapa das cidades, onde estão localizados os Campus da UFMS.

Fonte: A autora.

Este problema é conhecido na literatura como o "Problema do Caixeiro Viajante", a questão não é achar um trajeto, já que, quando possível, é relativamente fácil de ser feito. A questão é encontrar um trajeto que minimize o tempo de viagem (ou a distância percorrida) e neste trabalho analisaremos dois métodos para encontrar o menor caminho e uma comparação entre eles.

2. METODOLOGIA

O presente trabalho é resultado de uma atividade de pesquisa individual do grupo PET Matemática UFMS/CPTL, que tem o objetivo de aprofundar o conhecimento em conceitos matemáticos que não são estudados durante a graduação. O estudo surgiu após um estudo bibliográfico sobre problemas de otimização, a teoria de grafos é rica neste campo e abordaremos neste trabalho os conceitos necessários para o entendimento do problema proposto.

O problema de encontrar o caminho de custo mínimo entre dois vértices de um grafo é o mais importante relacionado com a busca de caminhos em grafos em vista de sua aplicação à várias situações de realidade.

Há um grande número de situações possíveis quando da obtenção deste caminho, a exemplo de: existência ou não de ciclos; determinação do caminho ou apenas do custo mínimo; etc. Dada esta diversidade de situações, há um número razoável de algoritmos que foram propostos ao longo do tempo, dentre os quais estudaremos os algoritmos de Dijkstra e dos mínimos sucessivos.

Definição 1: Grafo é um trio (V, E, Y), onde V é o conjunto de vértices, E o conjunto de arestas e Y uma função de incidência $Y: E \to V \times V$, ou seja, uma aresta que conecta a um par de vértices.

Para simplificar nossa escrita, adotaremos a seguinte notação para as cidades:

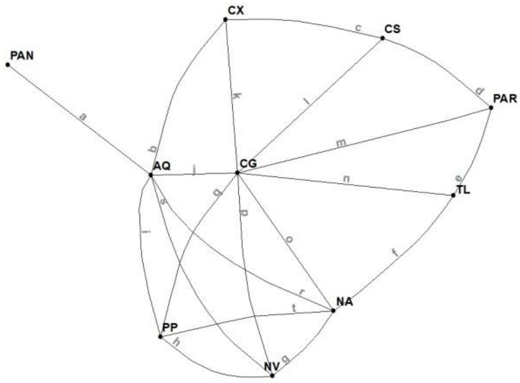
Tabela 1. Notação

Cidade	Notação
Campo Grande	CG
Aquidauana	AQ
Coxim	CX
Chapadão do Sul	CS
Paranaíba	PAR
Três Lagoas	TL
Nova Andradina	NA
Naviraí	NV
Ponta Porã	PP
Corumbá	PAN

Fonte: A autora.

As siglas na Tabela 1 são utilizadas para dar nomes aos campus da UFMS, por exemplo, o campus de Três Lagoas é denominado CPTL e o campus de Corumbá é o CPAN. Na Figura 3, temos um exemplo de grafo, o qual estamos interessados em estudar. Consideramos como sendo os vértices, os Campus da UFMS e as arestas, as estradas.

Figura 3. Grafo das cidades onde estão localizados os Campus da UFMS.



Fonte: A autora.

No grafo G, da figura 3, temos que:

$$V(G) = \{CG, AQ, CX, CS, PAR, TL, NA, \quad NV, PP, PAN\}$$

$$E(G) = \begin{Bmatrix} a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \\ l, m, n, o, p, q, r, s, t \end{Bmatrix}$$

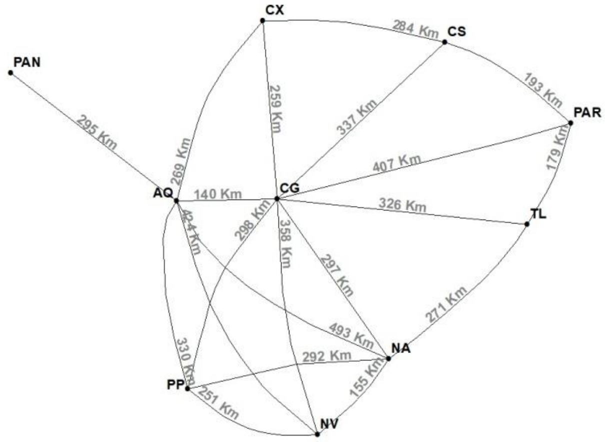
A função de incidência é definida por:

$Y(a) = \{PAN, AQ\}$ $Y(b) = \{AQ, CX\}$ $Y(c) = \{CX, CS\}$
$Y(d) = \{CS, PAR\}$ $Y(e) = \{PAR, TL\}$ $Y(f) = \{TL, NA\}$
$Y(g) = \{NA, NV\}$ $Y(h) = \{NV, PP\}$ $Y(i) = \{PP, AQ\}$
$Y(j) = \{AQ, CG\}$ $Y(k) = \{CG, CX\}$ $Y(l) = \{CG, CS\}$
$Y(m) = \{CG, PAR\}$ $Y(n) = \{CG, TL\}$ $Y(o) = \{CG, NA\}$
$Y(p) = \{CG, NV\}$ $Y(q) = \{CG, PP\}$ $Y(r) = \{AQ, NA\}$
$Y(s) = \{AQ, NV\}$ $Y(t) = \{PP, NA\}$

Ganha-se muito em simplicidade no momento da representação dos grafos por diagramas.

Definição 2: Grafo Ponderado é um grafo onde cada uma de suas arestas possuem um peso numérico associado a elas.

Figura 4. Grafo Ponderado das cidades onde estão localizados os Campus da UFMS.



Fonte: A autora.

Neste caso, pela Definição 2, temos um Grafo Ponderado, onde as medidas são as distâncias entre as cidades.

Vamos, agora, estabelecer alguns conceitos de grandeza dos grafos. O primeiro foca nos vértices:

Definição 3. Ordem de um grafo é a quantidade de vértices que ele possui. Em outras palavras, é a quantidade de elementos do conjunto V.

Indicaremos a ordem de um grafo G pela notação $|V(G)|$. Na Figura 3, temos um grafo G de ordem 10, ou seja, $|V(G)| = 10$.

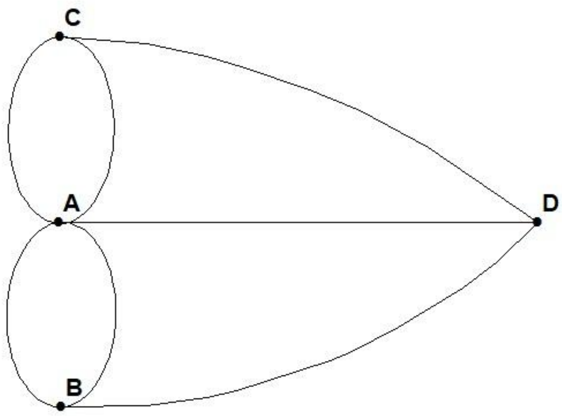
Definição 4: Tamanho de um grafo é a quantidade de suas arestas, ou seja, é a quantidade de elementos do conjunto E.

Da mesma forma, indicaremos o tamanho de um grafo pela notação $|E(G)|$. Na Figura 3, temos que $|E(G)| = 19$.

Ciclo é um caminho fechado sem vértices repetidos, e um ciclo euleriano é aquele que possui todas as arestas do grafo exatamente uma vez. Um grafo euleriano é aquele que possui um ciclo euleriano, em outras palavras, um grafo é euleriano se pudermos desenhá-lo sem tirar o lápis do papel e voltar ao ponto de partida, sem passar mais de uma vez por nenhuma aresta.

No problema das pontes de Königsberg, podemos representa-lo como um grafo onde se pede um ciclo euleriano.

Figura 5. Grafo do problema das pontes de Königsberg.



Fonte: A autora.

Esse problema consiste em partir de uma dessas regiões e determinar um trajeto pelas pontes segundo o qual se possa retornar à região de partida após atravessar cada ponte somente uma vez. Este problema trata-se de um grafo euleriano, no qual não é possível fazer o percurso de iniciar em uma ponte, passar por todas as outras uma só vez e retornar ao ponto de origem.

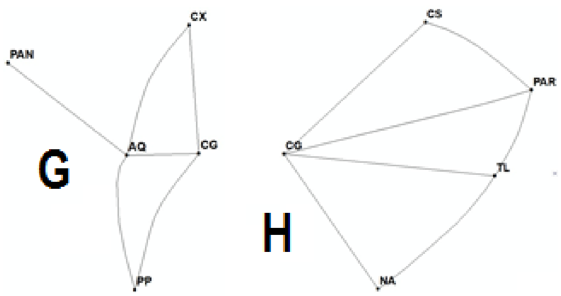
Temos que o grau de um vértice é a quantidade de arestas que se conectam a ele. Considere as pontes sendo as arestas e os que não são pontes, vértices. Assim, analisando a Figura 5, podemos notar que os vértices têm grau ímpar. Os vértices C, D e B possuem três arestas e o vértice A cinco arestas. Escolhendo um deles para partir, caso queira percorrer todas as arestas só uma vez, verá que não terminará nele. Então, um vértice com grau ímpar deve ser onde começa ou termina nosso caminho. Por fim, é impossível traçar tal caminho com as condições dadas, pois, um grafo só pode ser percorrido de tal maneira, se o diagrama tiver somente vértices de grau par, o que não acontece com o problema citado.

O problema que estamos abordando não exige que passamos por todas as estradas, mas sim por todas as cidades, então definimos aqui o conceito de ciclo hamiltoniano.

Definição 5: Um grafo G é hamiltoniano, se existe um ciclo em G, que contenha todos os seus vértices, sendo que cada vértice só aparece uma vez no ciclo. Este ciclo é chamado de ciclo hamiltoniano. Sendo assim, um grafo é hamiltoniano se ele contiver um ciclo hamiltoniano.

Considere os grafos G e H da Figura 6. O gráfico H possui o ciclo $\{CG, CS, PAR, TL, NA, CG\}$ que é hamiltoniano, enquanto que o grafo G não possui ciclo hamiltoniano.

Figura 6. Grafos Hamiltonianos.



Fonte: A autora.

O problema de encontrar o ciclo hamiltoniano, embora semelhante ao problema do cálculo do euleriano, é muito mais complexo, pois não são conhecidas as condições necessárias e suficientes para que um grafo genérico contenha um ciclo hamiltoniano.

Este problema está intimamente relacionado ao problema do caixeiro viajante, o qual consiste em encontrar um caminho que passe por todas as cidades uma única vez e retorne ao ponto de partida escolhendo para isso um caminho de custo mínimo.

3. PROBLEMA DO MENOR CAMINHO

O problema a ser abordado se trata de um grafo hamiltoniano, que consiste em passar por todos os vértices de um grafo, não repetindo nenhum, a fim de encontrar um caminho ótimo. Investigaremos o algoritmo dos mínimos sucessivos e o algoritmo da ordenação do peso das arestas.

Não é possível passar uma única vez em todas cidades, se considerarmos o Campus de Corumbá, pois a única rota para chegar em Corumbá é passando por Aquidauana. Assim, excluiremos o Campus CPAN e ao final do estudo acrescentaremos novamente o campus.

Representa-se abaixo a respectiva rede de cidades, onde se encontram os Campus da UFMS e uma tabela das distâncias quilométricas.

Tabela 2. Distância, em quilômetros, das cidades onde estão localizados os Campus da UFMS.

	AQ	CS	CX	NV	NA	PAN	PAR	PP	TL	CG
AQ	0	473	269	424	431	295	564	330	482	140
CS	473	0	284	697	615	762	193	643	328	337
CX	269	284	0	619	550	564	476	564	570	259
NV	424	697	619	0	155	707	607	251	425	358
NA	431	615	550	155	0	719	453	292	271	297
PAN	295	762	564	707	719	0	834	613	768	426
PAR	564	193	476	607	453	834	0	713	179	407
PP	330	643	564	251	292	613	713	0	561	298
TL	482	328	570	425	271	768	179	561	0	326
CG	140	337	259	358	297	426	407	298	326	0

3.1. ALGORITMO DOS MÍNIMOS SUCESSIVOS

Começa-se por escolher uma cidade para início do circuito. A partir dessa cidade, visita-se a mais próxima e assim sucessivamente, até completar o circuito; terminado o circuito, somam-se os quilômetros percorridos. Repete-se este procedimento, de forma a obter 9 circuitos hamiltonianos, cada um dos quais com início numa das cidades.

Obtemos assim os percursos percorridos:

Tabela 3. Percursos percorridos, em quilômetros.

Aquidauana	
Campo Grande	140
Coxim	259
Chapadão do Sul	284
Paranaíba	193
Três Lagoas	179
Nova Andradina	271
Naviraí	155
Ponta Porã	251
Aquidauana	330
	2062

Fonte: A autora.

Coxim	
Campo Grande	259
Aquidauana	140
Ponta Porã	330
Naviraí	251
Nova Andradina	155
Três Lagoas	271
Paranaíba	179
Chapadão do Sul	193
Coxim	284
	2062

Chapadão do Sul	
Paranaíba	193
Três Lagoas	179
Nova Andradina	271
Naviraí	155
Ponta Porã	251
Campo Grande	298
Aquidauana	140
Coxim	269
Chapadão do Sul	284
	2040

Paranaíba	
Três Lagoas	179
Nova Andradina	271
Naviraí	155
Ponta Porã	251
Campo Grande	298
Aquidauana	140
Coxim	269
Chapadão do Sul	284
Paranaíba	193
	2040

Campo Grande	
Aquidauana	140
Coxim	269
Chapadão do Sul	284
Paranaíba	193
Três Lagoas	179
Nova Andradina	271
Naviraí	155
Ponta Porã	251
Campo Grande	298
	2040

Três Lagoas	
Paranaíba	179
Chapadão do Sul	193
Coxim	284
Campo Grande	259
Aquidauana	140
Ponta Porã	330
Naviraí	251
Nova Andradina	155
Três Lagoas	271
	2062

Nova Andradina	
Naviraí	155
Ponta Porã	251
Campo Grande	298
Aquidauana	140
Coxim	269
Chapadão do Sul	284
Paranaíba	193
Três Lagoas	179
Nova Andradina	271
	2040

Naviraí	
Nova Andradina	155
Três Lagoas	271
Paranaíba	179
Chapadão do Sul	193
Coxim	284
Campo Grande	259
Aquidauana	140
Ponta Porã	330
Naviraí	251
	2062

Ponta Porã	
Naviraí	251
Nova Andradina	155
Três Lagoas	271
Paranaíba	179
Chapadão do Sul	193
Coxim	284
Campo Grande	259
Aquidauana	140
Ponta Porã	330
	2062

Fonte: A autora.

Assim, podemos concluir que após a aplicação do algoritmo dos mínimos sucessivos entre os ciclos apresentados na Tabela 3, o clico de menor peso é o que tem valor 2040 km, que são os ciclos que partiram das cidades de Chapadão do Sul, Paranaíba, Campo Grande e Nova Andradina.

3.2. ALGORITMO DA ORDENAÇÃO DO PESO DAS ARESTAS

Primeiro ordena-se todas as arestas por ordem crescente do respectivo peso (distância).

Tabela 4. Ordem crescente das distâncias em quilômetros.

Aquidauana	Campo Grande	140
Naviraí	Nova Andradina	155
Três Lagoas	Paranaíba	179
Paranaíba	Chapadão do Sul	193
Ponta Porã	Naviraí	251
Campo Grande	Coxim	259
Aquidauana	Coxim	269
Nova Andradina	Três Lagoas	271
Coxim	Chapadão do Sul	284
Ponta Porã	Nova Andradina	292
Nova Andradina	Campo Grande	297
Ponta Porã	Campo Grande	298
Campo Grande	Três Lagoas	326
Ponta Porã	Aquidauana	330
Campo Grande	Chapadão do Sul	337
Naviraí	Campo Grande	358
Campo Grande	Paranaíba	407
Aquidauana	Naviraí	424

Fonte: A autora.

Em seguida, tenta-se encontrar um circuito hamiltoniano que utilize as arestas de menor peso, tendo em conta o seguinte:

(1) Nunca se toma a terceira aresta incidente num mesmo vértice;

(2) Nunca se fecha o ciclo enquanto houver vértices não visitados.

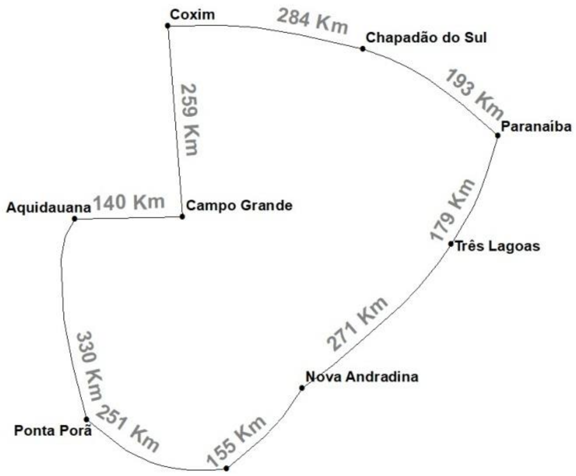
A aresta que tem menor peso é a aresta que liga AQ a CG de peso 140, depois a aresta de NV a NA de peso 155, seguindo a aresta de TL a PAR de peso 179 e assim se repete até chegar a aresta que conecta AQ a CX. Note que AQ e CX já foram visitadas, logo fechariam o grafo e como isso não pode acontecer, a próxima aresta a ser adicionada na solução seria então, NA a TL de peso 271, posteriormente CX a CS de peso 284. As arestas que unem PP a NA, NA a CG, PP a CG, CG a TL não podem ser agregadas na solução, pelo motivo já citado. Assim, inserimos a aresta que junta PP a AQ de peso 330. Como já completamos o grafo e visitamos todos os vértices, basta agora somar todos os pesos das arestas. Chegando assim na solução da Tabela 5, com um total de 2062 km, e o grafo representado na Figura 7.

Tabela 5. Solução do algoritmo da ordenação do peso das arestas.

Aquidauana	Campo Grande	140
Naviraí	Nova Andradina	155
Três Lagoas	Paranaíba	179
Paranaíba	Chapadão do Sul	193
Ponta Porã	Naviraí	251
Campo Grande	Coxim	259
Nova Andradina	Três Lagoas	271
Coxim	Chapadão do Sul	284
Ponta Porã	Aquidauana	330
		2062

Fonte: A autora.

Figura 7. Grafo ponderado resultante do algoritmo da ordenação do peso das arestas.



Fonte: A autora.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considerando o Campus de Corumbá no circuito percorrido, devemos acrescentar a distância de Aquidauana até o campus CPAN, que é de 590 km, desta forma pelo método dos mínimos sucessivos teríamos um percurso de 2630 km e pelo método da ordenação dos pesos um total de 2652 km.

Observe que no método dos mínimos sucessivos a solução se baseia na escolha sucessiva da melhor etapa, o que pode não conduzir à melhor solução. No entanto, o resultado é aceitável, se tivermos em conta outros critérios, nomeadamente a economia de tempo. O número de circuitos hamiltonianos possíveis é determinado pela fórmula $\frac{(n-1)!}{2}$, neste caso teríamos $\frac{9!}{2} = 181440$ hipóteses.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria dos grafos é essencial para resolução de problemas, desde os mais simples aos elaborados. São problemas que justificam atenção devido ao fato de aparecerem diversas aplicações e serem considerados difícil solução. Neste trabalho foi possível estudar conceitos que não são estudados no curso de Licenciatura em Matemática, trazendo assim novos conhecimentos para a formação do aluno.

AGRADECIMENTOS

Ao grupo PET Matemática, por me proporcionar o conhecimento, não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional.

Ao Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza, pela orientação, apoio e confiança.
A Deus e a todos os outros que fazem parte da minha vida.

REFERÊNCIAS

NOGUEIRA, Daniel Klug. **Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio**. 2015. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Brasília.

PEREIRA, Giselle Moraes Resende; CÂMARA, Marcos Antônio da. **Algumas Aplicações da Teoria dos Grafos**. Revista Científica Eletrônica da Faculdade de Matemática - FAMAT, Uberlândia, v. 11, n. 8, p. 67-79, 2008.

BRITO, Lucas Vieira. **Teoria dos Grafos e uma aplicação**. 2015. Monografia (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, Vitória da Conquista.

UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON PARA O CÁLCULO DE FUNÇÕES DE MATRIZES

Roberto Junior Dias, Marcus Vinícius Ribeiro Bernardo Silvério, Vitor Moretto Fernandes Da Silva.

Universidade Federal de Mato Grosso Do Sul – UFMS. E-mail: robertojrdias@hotmail.com

RESUMO – O estudo das funções com domínio real está bem definida e estão presentes nas abordagens tradicionais. Neste trabalho, foram explorados alguns métodos de analisar qual é o comportamento de uma função $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ quando aplicada em uma matriz A ou em um operador linear T. Este estudo desenvolvido no âmbito do Programa de Educação Tutorial, busca trazer alguns resultados interessantes e não triviais da Matemática, bem como o cálculo de raízes n-ésimas de uma matriz e potências de uma matriz. Nessa pesquisa encontra-se soluções para problemas como a operação de radiciação de matrizes e o cálculo de uma potência de uma matriz, sendo esse o objetivo principal deste trabalho, contudo, diminuindo a complexidade de um problema.
Palavras-chave: função; matrizes; operadores lineares.

AN APPLICATION OF THE CAYLEY-HAMILTON THEOREM FOR THE CALCULATION OF MATRIX FUNCTIONS

ABSTRACT - The study of real-domain functions is defined and present in traditional approaches. In this work, were explored some methods of analysis of what is the behavior of a function $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ when applied to an A matrix or T linear operator. This study desenvolved on Tutorial Extension Progam, can generate some results very interesting and non-trivial mathematical, such as the calculation of n^{th} root of a matrix and powers of a matrix. In this research, is possible o find solutions to problems such as matrix radiation operation and the calculus of a Power of a matrix being the main obejctive of this work, while, decreasing the dificulty of a problem.
Keywords: function; matrices; linear operators.

1. INTRODUÇÃO

O estudo das aplicações e conceitos da álgebra linear resultam em formas distintas de resolver certos cálculos ou ainda em encontrar novas aplicações, tanto na Matemática Pura quanto na Matemática Aplicada. Tendo essa direção como um norte para a elaboração deste trabalho, com o objetivo de discutir a problemática de encontrar um método no qual pode-se estudar propriedades não triviais de uma matriz.

Definindo inicialmente uma função $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, a partir disso surge um breve questionamento sobre qual seria o valor de f quando aplicado a um operador linear T (ou em uma matriz A), ou seja, qual é o valor assumido por f em T. Essa aplicação é chamada função de matriz, entretanto essa denominação precisa ser definida. Contudo pode-se obter alguns resultados, como por exemplo, utilizando a aplicação $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, para facilitar o cálculo de raízes n-ésimas de uma matriz quadrada e potências dessa mesma matriz, definindo $f(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Quando se trata de raízes n-ésimas de uma matriz a operação de radiciação não é tão simples, mas como está bem definida a multiplicação entre matrizes, pode-se manipular a seguinte igualdade $\sqrt[n]{A} = B \Longrightarrow A = B^n$ (com algumas restrições com relação ao valor de n e entradas da matriz A). Percebe-se que é possível encontrar métodos de resolução, um deles é usar a igualdade $A = B^n$, sendo B uma matriz genérica com mesma ordem da matriz A, portanto $B.B \ldots B = A$, assim encontrando as entradas que serão utilizadas na matriz $B = \sqrt[n]{A}$. Porém será identificado um sistema não linear, que dependendo da ordem da matriz A poderão surgir problemas na resolução, sem o uso de ferramentas computacionais, para isso foi estudado um fragmento do cálculo funcional, aplicando o teorema de Cayley-Hamilton nessa função f definida. Pode-se então, por meio da resolução de um simples sistema linear, encontrar qual é a raiz quadrada da matriz A. Com base nesse teorema e na teoria de álgebra linear é possível descobrir qual é o valor de A^n, para um certo n não tão pequeno, rumo ao objetivo principal do trabalho.

De início serão ilustrados alguns teoremas e definições que irão servir de base para o objetivo final, para a melhor compreensão desse artigo, é necessário que o leitor tenha conhecimento prévio das definições iniciais de álgebra linear, pois algumas definições básicas serão omitidas.

2. METODOLOGIA

Este trabalho foi elaborado com base em pesquisa teórica e em reuniões juntamente com o orientador. Foram estudados tópicos de álgebra linear presentes na ementa do curso, como: Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Espaço $L(U,V)$ e Operadores e Polinômios que são temas importantes para melhor entendimento das aplicações do teorema de Cayley-Hamilton. Para além disso, o presente estudo busca aprofundar estes conteúdos, estudados no curso de Licenciatura em Matemática.

Os resultados e a problemática foram feitos com base nos exercícios e apresentações feitas ao orientador, no qual foram discutidas as formas e métodos diferentes para aplicar e demonstrar conceitos da álgebra linear.

3. RESULTADOS

A seguir será apresentado alguns tópicos de álgebra linear e posteriormente os cálculos necessários para complementar os exemplos propostos.

3.1 Conceitos básicos

Seguem algumas definições que podem ser encontradas em BUENO e COELHO (2006. 2013).

3.1.1 Transformações lineares

Definição 1. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma transformação linear é uma aplicação $T: U \longrightarrow V$ tal que:

$$T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y),\ \forall\, x, y \in U \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Lema. Sejam V e U espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T: U \longrightarrow V$ uma transformação linear. Então:
i) $T(0_U) = 0_V$, onde 0_U e 0_v denotam os vetores nulos de U e V, respectivamente;
ii) $T(-v) = -T(v)$, para todo $v \in U$.

Exemplo 1. Sejam $T: \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$, dada por $T(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{K}^3$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ ($x = (a,b,c)\ e\ y = (d,e,f)$).

Aplicando T em $(x+\lambda y)$:

$$T(x+\lambda y) = T\big((a,b,c) + \lambda(d,e,f)\big) = T(a+\lambda d, b+\lambda e, c+\lambda f) =$$
$$\begin{bmatrix} (a+\lambda d)+(b+\lambda e) & 0 \\ 0 & (c+\lambda f)-(b+\lambda e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)+\lambda(d+e) & 0 \\ 0 & (c-b)+\lambda(f-e) \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda(d+e) & 0 \\ 0 & \lambda(f-e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} (d+e) & 0 \\ 0 & (f-e) \end{bmatrix} = T(a,b,c) +$$
$$\lambda T(d,e,f).$$

Portanto a aplicação T deste exemplo é uma transformação linear.

Exemplo 2. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ o espaço vetorial dos polinômios sobre $\mathbb{C}$ e considere a aplicação:

$$D: \mathcal{P}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$$
$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \longmapsto a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_{n-1}x^{n-1}.$$

Ou seja, D é a aplicação derivação restrita aos polinômios, seja $p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, segue, $D\big(p(x)\big) = p'(x)$. Seja $p(x), q(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, da definição do cálculo diferencial obtêm-se $(p+q)'(x) = p'(x) + q'(x)$ e $(\lambda p)'(x) = \lambda(p'(x))$. Então, D é uma transformação linear.

3.1.2 O espaço $L(U,V)$

Para espaços vetoriais U e V sobre $\mathbb{K}$, denota-se por $L(U,V)$ o conjunto de todas as transformações lineares de U a V. Tal conjunto herda uma estrutura de espaço vetorial.

Sejam $F, G, H \in L(U,V)$, com $F(u)$, $G(u)$, $H(u) \in V$. Assumindo as propriedades de adição do espaço vetorial V, valem as seguintes propriedades:

(A1) Associativa: $F + (G + H) = (F + G) + H$;

Prova: seja $u \in U$, segue:

$$\big(F + (G + H)\big)(u) = F(u) + (G + H)(u) = F(u) + \big(G(u) + H(u)\big) \stackrel{\text{def}}{=} \big(F(u) + G(u)\big) + H(u) = (F + G)(u) + H(u) = ((F + G) + H)(u).$$

Portanto, vale a propriedade associativa em relação a soma.

(A2) Comutativa: $F + G = G + F$;

Prova: seja $u \in U$, segue que:

$$(F + G)(u) = F(u) + G(u) \stackrel{\text{def}}{=} G(u) + F(u) = (G + F)(u).$$

Portanto, vale a propriedade comutativa em relação a soma.

(A3) Existência de um elemento neutro;

Prova: Seja $E: U \longrightarrow V$, definida por $E(u) = 0_V$, onde 0_V é o elemento neutro aditivo de V, logo:

$$(F + E)(u) = F(u) + E(u) = F(u) + \ 0_V = F(u).$$

Portanto, existe um elemento neutro aditivo em $L(U,V)$, a transformação E é conhecida como transformação identidade de $L(U,V)$.

(A4) Dada a transformação linear F, existe a transformação oposta $-F$:

$$\big(F + (-F)\big)(u) = F(u) + (-F)(u) \stackrel{\text{def}}{=} F(u) - F(u) = 0_V.$$

Portanto, existe um elemento oposto para cada elemento de $L(U,V)$.

Para toda F, G, $H \in L(U,V)$ e α, $\beta \in \mathbb{K}$ valem as seguintes propriedades:

(M1) Associativa: $\alpha(\beta F) = (\alpha\beta)F$;

Prova: seja $u \in U$, segue que:

$$(\alpha(\beta F))(u) = \alpha(\beta F(u)) = (\alpha\beta)F(u) = ((\alpha\beta)F)(u).$$

Portanto, vale a propriedade associativa em relação a multiplicação por escalar.

(M2) Existência de um elemento neutro: $EF = F$;

Prova: Seja $E: U \longrightarrow V$, definida por $E(u) = 1_V$, onde 1_V é o elemento neutro multiplicativo de V, obtêm-se:

$$(EF)(u) = E(u)F(u) = 1_V F(u) \stackrel{\text{def}}{=} F(u).$$

Portanto, existe um elemento neutro multiplicativo.

(D1) $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$;

Prova: Seja $u \in U$, segue que:

$$\big((\alpha + \beta)F\big)(u) = (\alpha + \beta)F(u) = \ \alpha F(u) + \beta F(u).$$

Portanto, está provada esta distributiva.

(D2) $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$;

Prova: Seja $u \in U$, segue que:

$$\big(\alpha(F + G)\big)(u) = \alpha(F + G)(u) = \alpha\big(F(u) + G(u)\big) = \alpha F(u) + \alpha G(u) = (\alpha F)(u) + (\alpha G)(u).$$

Portanto, está provada a distributividade de $L(U,V)$.

Como o conjunto $L(U,V)$ satisfaz todas essas condições, pode-se afirmar que $L(U,V)$ é um espaço vetorial.

Teorema. Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ com dimensões n e m, respectivamente. Então o espaço $L(U,V)$ tem dimensão $n.m$.

Será omitida esta demonstração, pois não é o objetivo principal deste trabalho, a demonstração poderá ser encontrada em (COELHO; LOURENÇO, 2013, p.102).

3.1.3 Operadores e Polinômios

Definição 2. Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um operador linear é uma transformação linear $T: U \longrightarrow U$.

Definição 3. Seja $T: V \longrightarrow V$ um operador linear:

i) um autovalor de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$.

ii) se λ é um autovalor de T, então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado autovetor de T associado a λ. Denota-se por $Aut_T(\lambda)$ o subespaço de V gerado por todos os autovetores associados a λ.

Definição 4. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, $T \in L(V,V)$ um operador linear. O polinômio $\det(xI - T)$ é conhecido como polinômio característico de T e o denota-se por $p_T(x)$. As raízes $\lambda_i \in \mathbb{K}$ desse polinômio são os autovalores de T.

Exemplo 3. Considere o operador $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, cuja representação matricial na base canônica do $\mathbb{R}^2$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A (e de T) é $p(x) = x^2$, de modo que seu único autovalor é $\lambda = 0$, ou seja, a multiplicidade de λ é 2.

Observação 1. Sejam $T: X \longrightarrow X$ um operador linear e $q \in \mathbb{K}[z]$, com $q(z) = \alpha_k z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$. Está bem definido o operador:

$$q(T) = \alpha_k T^k + \alpha_{k-1} T^{k-1} + \cdots + \alpha_1 T + \alpha_0 I.$$

Definição 5. Seja $p(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ um polinômio, este polinômio será um polinômio mônico se $\alpha_k = 1$.

Definição 6. Um polinômio mínimo $m \in \mathbb{K}[z]$ de uma aplicação $T: X \longrightarrow X$ é um polinômio mônico de menor grau tal que $m(T) = 0$.

Lema 1. Todo operador linear $T: X \longrightarrow X$, definido em um espaço X de dimensão n, possui um polinômio mínimo.

Demonstração. O espaço $L(X,X)$ de todas as aplicações lineares $T: X \longrightarrow X$ é um espaço vetorial de dimensão n^2. Assim, as aplicações lineares I, T, T^2,..., T^{n^2} são, necessariamente, linearmente dependentes. Quer dizer, existem escalares α_0, α_1,..., $\alpha_{n^2} \in \mathbb{K}$, nem todos nulos, tais que:

$$\alpha_0 I + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_{n^2} T^{n^2} = 0.$$

Definindo $p'(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{n^2} z^{n^2}$, com $p' \neq 0$ e $p'(T) = 0$. Dividindo pelo coeficiente do termo de maior grau, será obtido um polinômio mônico p. O polinômio mínimo então existe, como decorrência da aplicação de Princípio da Boa Ordenação ao conjunto de todos os polinômios mônicos que anulam T.

Lema 2. Se $p(T) = 0$ para um polinômio $p \in \mathbb{K}[z]$ e m um polinômio mínimo de T, então p é um múltiplo de m.

3.2 O Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema. (Cayley-Hamilton). Seja operador linear $T \in L(X,X)$. Se $p \in \mathbb{K}[z]$ for o polinômio característico de T, então $p(T) = 0$.

A demonstração desse teorema pode ser vista em (BUENO, 2006, p. 86).

Corolário 1. Seja operador linear $T \in L(X,X)$. O polinômio mínimo de T é um divisor do polinômio característico de T.

Observação. O polinômio característico de uma transformação $T \in L(X,X)$ é um candidato ao polinômio mínimo de T.

3.3 Polinômio Interpolador

Definição 7. Uma função $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é euclidiana com relação ao polinômio p se:

i) todas as raízes de p pertencem a I;
ii) se z_0 for uma raiz de p com multiplicidade k, então f tem derivadas até a ordem k em z_0.

Proposição. Seja f euclidiana com relação ao polinômio p. Então existem uma função q, contínua em cada uma das raízes do polinômio p, e um polinômio r tais que $f = qp + r$, $gr(r) < gr(p)$.

Neste próximo exemplo será usado a notação $\sqrt{A}$, sabendo que $\sqrt{A} = B$, assim, $A = B^2$, ou seja, a raiz quadrada de uma matriz A é uma matriz B que quando elevada ao quadrado resulta na matriz A. As propriedades de multiplicação estão bem definidas, logo faz sentido usar a notação $\sqrt{A}$.

Exemplo 4: Seja a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, será calculado valor $\sqrt{A}$.

Sejam p o polinômio característico de A, neste caso pode-se notar que $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Defina a função $f(x) = \sqrt{x}$, f é euclidiana com relação ao polinômio característico p, assim, $f(x) = q(x)p(x) + r(x)$, com $gr(r) < gr(p)$.

Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton no polinômio p, com $p(A) = 0$, ou seja, p anula a matriz A, assim trabalhando com a divisão euclidiana, $f(A) = q(A)p(A) + r(A) \Rightarrow f(A) = r(A)$. Sabendo que $r(x) = ax + b$ e aplicando as raízes de p na função A pode-se encontrar os valores a e b.

Para $x = 2$:

$$f(2) = q(2)p(2) + r(2)$$
$$\sqrt{2} = f(2) = r(2)$$
$$\sqrt{2} = a2 + b.$$

Para $x = 3$:

$$f(3) = q(3)p(3) + r(3)$$
$$\sqrt{3} = f(3) = r(3)$$
$$\sqrt{3} = a3 + b.$$

Assim é possível montar um sistema linear bem simples:

$$\begin{cases} \sqrt{2} = a2 + b \\ \sqrt{3} = a3 + b. \end{cases}$$

A solução desse sistema linear é $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ e $b = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, mas $f(A) = \sqrt{A} = r(A)$, assim:

$$r(A) = \sqrt{A} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)A + \left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)I.$$

E finalmente podemos calcular $\sqrt{A}$ usando $r(A)$, logo tem-se que:

$$\sqrt{A} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} - \sqrt{3} & \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Para o cálculo da raiz quadrada de matriz de mesma ordem que a matriz A do exemplo 4, torna-se necessário acrescentar uma certa restrição, pois caso os autovalores λ_i fossem negativos não poderíamos calcular $\sqrt{\lambda_i}$ pois a função está definida nos $\mathbb{R}$, contudo, pode-se calcular a raiz cúbica de λ_i, para λ_i negativo, logo para calcular a raiz, em geral, de índice impar pode-se calcular facilmente sem nenhuma restrição do domínio da aplicação f.

Exemplo 5: Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, vamos calcular $\sqrt[3]{M}$ usando o mesmo método do exemplo 4.

Sejam p o polinômio característico de M, logo $p(x) = \det(xI - M) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$. Defina a função $g(x) = \sqrt[3]{x}$, g é euclidiana com relação ao polinômio característico p, assim, $g(x) = q(x)p(x) + r(x)$, com $gr(r) < gr(p)$.

Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton no polinômio p, com $p(M) = 0$, ou seja, p anula a matriz M, assim trabalhando com a divisão euclidiana, $g(M) = q(M)p(M) + r(M) \Rightarrow g(M) = r(M)$. Sabendo que $r(x) = ax^2 + bx + c$ e aplicando as raízes de m na função g pode-se encontrar os valores a, b e c.

Para $x = -2$:

$$g(-2) = r(-2)$$
$$\sqrt[3]{-2} = 4a - 2b + c.$$

Para $x = 1$:

$$g(1) = r(1)$$
$$1 = a + b + c.$$

Para $x = -1$:

$$g(-1) = r(-1)$$
$$-1 = a - b + c.$$

Resolvendo o sistema linear, obtêm-se:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = \sqrt[3]{-2} \\ a + b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt[3]{-2} + 2}{3} \\ b = 1 \\ c = -\dfrac{\sqrt[3]{-2} + 2}{3}. \end{cases}$$

Por $g(M) = r(M)$, e $g(M) = \sqrt[3]{M}$, então, $r(M) = \frac{\sqrt[3]{-2}+2}{3}M^2 + M - \frac{\sqrt[3]{-2}+2}{3}I = \sqrt[3]{M}$. Sabe-se que $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, assim:

$$r(M) = \sqrt[3]{M} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-2}{3}(2\sqrt[3]{-2} + 1) & 1 \\ 0 & \sqrt[3]{-2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}(1 - \sqrt[3]{-2}) & 1 \end{bmatrix} = N,$$

ou seja, $N^3 = M$.

Exemplo 6: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$, seja $f(x) = x^{2019}$. Será calculado qual é o valor de A^{2019}, o polinômio característico de A será:

$$p(x) = \det(xI - A) = \left(x - \tfrac{7}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} = (x - 3)(x - 4),$$

portanto, as raízes de p são 3 e 4, assim:

$$3^{2019} = f(3) = r(3) = a3 + b$$

e

$$4^{2019} = f(4) = r(4) = a4 + b.$$

montando um sistema linear com essas duas equações:

$$\begin{cases} 3^{2019} = 3a + b \\ 4^{2019} = 4a + b. \end{cases}$$

Assim a solução é $a = 4^{2019} - 3^{2019}$ e $b = -3.4^{2019} + 4.3^{2019}$. Como p é o polinômio característico de A, pelo teorema de Cayley-Hamilton, têm-se que $p(A) = 0$, assim:

$$f(A) = q(A)p(A) + r(A) \Rightarrow$$
$$f(A) = r(A) \Rightarrow$$
$$A^{2019} = (4^{2019} - 3^{2019})A + (-3.4^{2019} + 4.3^{2019})I.$$

Resolvendo algebricamente essa igualdade, obtêm-se:

$$A^{2019} = \begin{bmatrix} \frac{3^{2019} + 4^{2019}}{2} & 4^{2019} - 3^{2019} \\ \frac{4^{2019} - 3^{2019}}{4} & \frac{3^{2019} + 4^{2019}}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo, foi possível encontrar A^{2019} resumindo toda a complexidade dessa matriz em um sistema linear com duas incógnitas.

3.4 Generalizando $\sqrt[n]{A}$, para $\forall\ A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

Sejam $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$, $f_n: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, para $n \in \mathbb{N}$, o polinômio característico de A é:

$$p(x) = \det(xI - A) = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - (Tr\ A)x + \det A.$$

Da divisão euclidiana $f_n(x) = q(x)p(x) + r(x)$, sendo x raiz do polinômio característico p implica $f_n(x) = r(x)$, sabendo que $gr\ r < gr\ p$, segue que $r(x) = sx + t$.

Será utilizada a fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes de p:

$$\Delta = (Tr\ A)^2 - 4.1.(\det A),$$

assim,

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (Tr\ A)^2 - 4(\det A) \geq 0 \Leftrightarrow (Tr\ A)^2 \geq 4(\det A).$$

1º Caso: $(Tr\ A)^2 > 4(\det A)$.

O polinômio p terá duas raízes, utilizando a fórmula de Bhaskara, segue ~~que~~:

$$x = \frac{Tr\ A \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

logo,

$$x_1 = \frac{Tr\ A + \sqrt{(Tr\ A)^2 - 4.1.(\det A)}}{2}$$

e

$$x_2 = \frac{Tr\ A - \sqrt{(Tr\ A)^2 - 4.1.(\det A)}}{2}.$$

Para n impar não tem nenhuma restrição quanto as raízes, logo:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{x_1} = ax_1 + b \\ \sqrt[n]{x_2} = ax_2 + b. \end{cases}$$

A solução desse sistema linear é:

$$a = \frac{\sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_1}}{x_2 - x_1}$$

e

$$b = \sqrt[n]{x_1} - x_1 \frac{\sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_1}}{x_2 - x_1}.$$

Portanto utilizando o fato de que $f_n(A) = r(A)$, obtêm-se:

$$f_n(A) = \sqrt[n]{A} = r(A) = aA + b \Longrightarrow$$
$$\sqrt[n]{A} = aA + b \Longrightarrow$$
$$\sqrt[n]{A} = \frac{\sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_1}}{x_2 - x_1} A + \left(\sqrt[n]{x_1} - x_1 \frac{\sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_1}}{x_2 - x_1} \right) I.$$

Como as raízes de p, o $Tr\ A$ e o $\det A$ são facilmente encontrados, basta substituir os valores na equação final e o resultado de $\sqrt[n]{A}$ será encontrado.

2º Caso: $(Tr\ A)^2 = 4 \det A$.

O polinômio p terá uma raiz de multiplicidade 2, utilizando a fórmula de Bhaskara, obtêm-se:

$$x = \frac{Tr\ A \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow$$
$$x = \frac{Tr\ A}{2}.$$

Para facilitar, pode-se denominar a raiz p como $\beta = \frac{Tr\ A}{2}$. O polinômio característico será $p(x) = (x - \beta)^2$ e assim $r(x) = ax + b$, portanto:

$$f_n(\beta) = r(\beta) \Rightarrow$$
$$\sqrt[n]{\beta} = a\beta + b.$$

Mas $p'(\beta) = 0 = p(\beta)$ e $r'(\beta) = a$, logo:

$$f'(x) = q'(x)p(x) + q(x)p'(x) + r'(x) \Rightarrow$$
$$f'(x) = r'(x) \Rightarrow$$
$$\frac{1}{n\sqrt[n]{\beta^{n-1}}} = a.$$

Assim é possível montar um sistema linear:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{\beta^{n-1}}} \\ b + a\beta = \sqrt[n]{\beta}. \end{cases}$$

Assim:

$$a = \frac{1}{n\sqrt[n]{\beta^{n-1}}}$$

e

$$b = \frac{\beta(n-1)}{n\sqrt[n]{\beta^{n-1}}}.$$

Enfim, como $f_n(A) = r(A)$, logo:

$$\sqrt[n]{A} = \left(\frac{1}{n\sqrt[n]{\beta^{n-1}}}\right)A + \left(\frac{\beta(n-1)}{n\sqrt[n]{\beta^{n-1}}}\right)I,$$

tal que $n \in \mathbb{N}$ e $\beta = \frac{Tr\ A}{2}$.

Para n par, e p tendo raiz negativa não será possível calcular $\sqrt[n]{A}$, pois a função f está definida nos $\mathbb{R}$, caso as raízes de p sejam não negativas o cálculo será análogo ao caso para n impar.

4. DISCUSSÃO

Para o cálculo da raiz quadrada de uma matriz A pode-se calcular quem é a matriz que ao quadrado irá resultar em A, ou seja, encontrar uma matriz B tal que $B^2 = A$, assim $B = \sqrt{A}$. Usando a mesma matriz A do exemplo 4 e seja B uma matriz genérica de ordem 2, logo $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, assim pode-se encontrar a matriz B usando um sistema não linear.

$$B^2 = A$$
$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11}b_{11}+b_{12}b_{21} & b_{11}b_{12}+b_{12}b_{22} \\ b_{21}b_{11}+b_{22}b_{21} & b_{21}b_{12}+b_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b_{11}b_{11}+b_{12}b_{21}=1 \\ b_{11}b_{12}+b_{12}b_{22}=1 \\ b_{21}b_{11}+b_{22}b_{21}=-2 \\ b_{21}b_{12}+b_{22}b_{22}=4. \end{cases}$$

Ao comparar o exemplo 4 com essa resolução pode-se notar que no exemplo 4 quando calculado o sistema, claramente ele será mais simples de resolver, por se tratar de um sistema linear, já nesse exemplo da discussão encontra-se um sistema não linear mais difícil de resolver, por meios não computacionais.

Usando o exemplo 5, vamos comparar o método estudado neste trabalho com o método tradicional usando uma matriz genérica N de ordem 3, onde $N^3 = M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Seja $N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$, logo,

$$N^3 = M \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste momento fica claro uma certa dificuldade nessa multiplicação de matrizes, porém adiantando todo esse processo chega-se no seguinte sistema:

$$\begin{cases} n_{11}n_{11}+n_{12}n_{21}+n_{13}n_{31}=-1 \\ n_{11}n_{12}+n_{12}n_{22}+n_{13}n_{32}=2 \\ n_{11}n_{13}+n_{12}n_{23}+n_{13}n_{33}=1 \\ n_{21}n_{11}+n_{22}n_{21}+n_{23}n_{31}=0 \\ n_{21}n_{12}+n_{22}n_{22}+n_{23}n_{32}=-2 \\ n_{21}n_{13}+n_{22}n_{23}+n_{23}n_{33}=0 \\ n_{31}n_{11}+n_{32}n_{21}+n_{33}n_{31}=0 \\ n_{31}n_{12}+n_{32}n_{22}+n_{33}n_{32}=2 \\ n_{31}n_{13}+n_{32}n_{23}+n_{33}n_{33}=1. \end{cases}$$

Não é difícil de perceber que esse sistema não linear é não trivial, e comparando este exemplo da discussão com o exemplo 5, pode-se notar a importância do estudo do cálculo funcional e suas aplicações.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram analisadas algumas aplicações de funções em matrizes e operadores, por intermédio dos tópicos de álgebra linear presentes nos resultados. Assim, utilizando o Teorema de Cayley-Hamilton têm-se um método para facilitar alguns cálculos com matrizes. Métodos esses, que podem se estender para outros exemplos de funções, como: funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, dentre outras que podem ser vistas em Bueno (2006).

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos aos revisores, organizadores, agências de fomento e ao Grupo PET Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Campus de Três Lagoas.

REFERÊNCIAS

BUENO, H. **Álgebra Linear, Um Segundo Curso**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

COELHO, F.; LOURENÇO, M. **Um curso de Álgebra Linear**. 2.ed. rev. e ampl. 3.reimp. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.

HOFFMAN, Kenneth & KUNZE, Ray. **Álgebra linear**. 2 ed Trad. Renate Watanabe. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra linear**. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

RESUMOS DE PESQUISA

Pesquisa (ENAPI)

Comunicação oral

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

COMPORTAMENTO DAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER COM UMA PERTURBAÇÃO NA SINGULARIDADE

JONAS ANTONIO PADOVANI EDERLI

De grande interesse na física-matemática é a versão estacionária da equação de Schrödinger não linear, ou mais especi?camente, {?(-?^2 ?u+V(x)u=f(u),em R^N@u > 0@u?H^1 (R^N))? (1) com as condições (V1) V?C^0 (V2) 0 < ?inf?_(R^N) V < ?liminf?_(|x|??) V (o ínfimo é limitado pelo liminf de V) (f1) f?C^1 (f admite derivada) (f2) f(0)=f^' (0)=0 (a função f e a derivada f no 0 são nulas) (f3) ?c_1,c_2?R e p?(?1,2?^*-1) tais que |f(s)| < =c_1 |s|+c_2 |s|^p , para todo s real (prop. da norma) (f4) ?? > 2 tal que 0 < ?F(s) < =f(s)s,onde F(s)=?_0^s?f(t)dt (f5) (f(s))/s é crescente para s > 0 O problema (1) foi estudado por Rabinowitz, onde foi provado um resultado de existência de solução usando pioneiramente métodos puramente variacionais. Após isso, Wang, provou que o problema com a não-linearidade imposta, admite uma sequência de soluções que se concentram em torno do mínimo global do potencial associado à equação. O presente trabalho teve como objetivo estudar o problema (1) com uma não-linearidade satisfazendo hipóteses menos restritivas. Para a prova deste, empregou-se métodos variacionais. Utiliza-se os argumentos de Rabinowitz para a prova da existência de solução para o problema (1), para valores de su?cientemente pequenos. Depois, mostramos que os níveis minimax associados ao problema (1) convergem para o nível minimax do problema limite {?(-?u+V_0 u=f(u),em R^N@u > 0@u?H^1 (R^N))? Isto, por sua vez, nos permite mostrar a concentração das soluções em torno de um ponto de mínimo de V utilizando-se dos argumentos de Wang. O principal resultado provado é o seguinte teorema. Teorema 1: Sejam V e f satisfazendo (V1) e (V2) e (f1) - (f5), respectivamente. Então para toda sequência ?_n?0, existe uma subsequência que continuaremos a denotar por ?_n tal que (1) (com ?_n no lugar de ?) possui uma solução positiva u_n?H^1 (R^N). Ainda mais, sendo x_n ponto de máximo de u_n, lim?(n??)??V(x_n)?=inf?(R^N)?V. Nossa principal contribuição é o de generalizar o resultado de Wang para não-linearidades do tipo potência, mas que não sejam necessariamente homogênea. Isto é de fato conhecido para casos ainda mais gerais, mas não encontra-se escrito para este caso particular, até o nosso conhecimento. Dessa forma, este trabalho mantém também um caráter pedagógico para estudantes iniciantes na área de EDP. Conclui-se que o Teorema 1 é válido mesmo considerando-se as condições menos restritivas propostas pelo trabalho. Órgão de fomento financiador da pesquisa: CAPES

Pesquisa (ENAPI) UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE

Ciências Exatas e da Terra

Comunicação oral Matemática

CÁLCULO DA ÁREA DA LAGOA MAIOR DE TRÊS LAGOAS MS POR MEIO DE INTEGRAIS DEFINIDAS

EDERSON LUZ MACEDO
FERNANDO PEREIRA DE SOUZA

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da Matemática que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas e a acumulação de quantidades. Entre os conceitos importantes está a integral que, geometricamente, pode ser identificada com o problema do cálculo da área debaixo de uma curva. Com o intuito de estudar aplicações de integrais que fujam dos exemplos tradicionais, o objetivo deste trabalho consistiu em calcular a área da Lagoa Maior da cidade de Três Lagoas - MS, que apresenta um formato irregular. O trabalho é resultado de um estudo teórico, baseado em aprofundamento de conceitos e aplicações, pesquisa sobre a região escolhida como objeto de estudo e por último a familiarização com os softwares GeoGebra e Graph utilizados no tratamento das imagens. A Lagoa Maior é a principal das três lagoas que dão nome a cidade, com uma área de 418 mil metros quadrados. Para encontrar sua área, utilizando integrais, foram escolhidas algumas imagens via Google Maps, com escala de 1 centímetro em escala virtual para 55,61 metros em escala real. Foi feita a demarcação de 79 pontos no contorno da Lagoa, e com o uso do GeoGebra e Graph, foi feita a planificação da área em 77 sub-regiões. A última etapa do trabalho consistiu em aproximar a parte irregular das regiões por polinômios de grau um e, assim, utilizar a integral definida para o cálculo das áreas de cada uma das sub-regiões. Posteriormente, somaram-se as áreas das sub-regiões, encontrando aproximadamente 413 mil metros quadrados. Vale ressaltar, que foram escolhidos lugares estratégicos para a marcação dos pontos ao redor da Lagoa visando minimizar a taxa de erro. Através deste trabalho, verifica-se que o modelo obtido utilizando a técnica de integração, é capaz de estabelecer a área de regiões diversas que podem estar presentes em problemas reais. Comparando o resultado com os dados apresentados no Guia turístico da cidade, pode-se observar uma diferença de áreas menor que 1,5%. Os resultados obtidos neste trabalho possuem justificativas científicas e poderiam ser ainda mais satisfatório se, o número de pontos marcados no contorno da Lagoa fosse aumentado. O Cálculo Diferencial e Integral possui diversas aplicações e muitas delas não são exploradas em profundidade nas disciplinas da graduação devido à falta de tempo, assim, foi possível aplicar conteúdos teóricos em uma questão prática, proporcionando possibilidades para exploração do conteúdo de forma multidisciplinar. Órgão de fomento financiador da pesquisa: Programa de Educação Tutorial

Pesquisa (ENAPI)

Comunicação oral

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE

Ciências Exatas e da Terra

Matemática

CÁLCULO DE RAÍZES RACIONAIS E APLICAÇÕES

CARLOS HENRIQUE DAMIÃO DOS SANTOS FILHO

Os Polinômios servem para tornar possíveis cálculos matemáticos em que não conhecemos muito as variáveis que os integram, e desta forma, é de grande interesse encontrar as raízes de determinadas funções polinomiais, sendo que para grau 3 e 4 este processo é bastante trabalhoso. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é demonstrar o Teorema das raízes racionais de um polinômio e realizar uma aplicação. O presente trabalho faz parte da atividade de pesquisa em matemática que é desenvolvida pelo grupo PET Conexões de Saberes Matemática da UFMS, Campus de Três Lagoas. O trabalho está sendo desenvolvido através de estudo teórico, seminários (onde estamos realizando dentro de uma sala de aula utilizando o quadro negro), pesquisas bibliográficas, demonstrações e aplicações sobre a temática funções polinomiais. Seja $f(x)=a_n x^n+a_{(n-1)} x^{(n-1)}+?+a_2 x^2+a_1 x+a_0$ com $a_1,a_2,.,a_{(n-1)},a_n$ ímpares e n par. Utilizando o teorema das raízes racionais, obtemos que f(x) não possui uma raiz racional. Neste sentido propomos neste trabalho um exemplo de resolução para encontrar os zeros de uma função polinomial de grau 4 utilizando o teorema das raízes racionais que é dado da seguinte forma: Considere o polinômio $p(x)=a_n x^n+a_{(n-1)} x^{(n-1)}+?+a_2 x^2+a_1 x+a_{(0)}$com coeficientes inteiros. Se a fração irredutível a/b, com a e b inteiros, é raiz de p(x), então a é divisor de a_0 e b é divisor de a_n. A proposta é mostrar o Teorema das raízes racionais, assim como demonstrar que um polinômio de grau par e coeficientes ímpares não possui raiz racional, resultado este que também é uma aplicação do teorema das raízes racionais. Órgão de fomento financiador da pesquisa: Programa de Educação Tutorial (PET)

Pesquisa (ENAPI) UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Comunicação oral Matemática

TERNAS PITAGÓRICAS.

RITCHARD MATHEUS SANTOS SOUZA
ALLAN EDLEY RAMOS DE ANDRADE

Neste trabalho apresentamos uma caracterização das chamadas ternas pitagóricas, as quais são ternas (a, b, c) de números inteiros positivos satisfazendo a^2+b^2=c^2. Abordar o conceito de ternas pitagóricas primitivas e não primitivas e mostrar como quantificar e determinar todos os triângulos pitagóricos que possuem como cateto um valor fixado M par. O trabalho é resultado de pesquisa teórica e prática desenvolvida no âmbito do Programa de Educação Tutorial (PET). Realizado através de leitura, discussão de artigos e apresentação de seminários. Nos estudos foram abordados tanto a parte histórica de Pitágoras e a parte analítica que corresponde a caracterização das ternas pitagóricas primitivas e não primitivas e o estudo de determinar todos os triângulos pitagóricos com cateto fixado. Neste trabalho foram estudados quatro teoremas, no qual os utilizamos para classificar entre primitiva e não primitiva e quantificar e determinar todos os triângulos pitagóricos que possuem como cateto um valor fixado M par. Ao abordar a temática terna pitagórica foi possível estudar diferentes frentes da matemática, por exemplo, um pouco de teoria dos números, geometria plana. No estudo surgiram vários fatos interessantes entre eles que é possível encontrar o número de todos os triângulos retângulos que possuem um determinado cateto. Assim, no desenvolvimento deste trabalho foi possível abordar e relembrar tanto aspectos geométricos como algébricos contribuindo para minha formação acadêmica Órgão de fomento financiador da pesquisa: Programa de Educação Tutorial (PET).

RELATOS DE EXPERIÊNCIA

Extensão (ENAEXT) UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Comunicação oral Matemática

APLICAÇÕES DE LÓGICA PROPOSICIONAL: PREPARANDO JOVENS PARA VESTIBULARES E CONCURSOS

LETÍCIA LIMA ALVES
VITOR MORETTO FERNANDES DA SILVA

A Lógica Proposicional é essencial em várias tomadas de decisões cotidianas. Além disso, a Lógica Matemática é também utilizada na Computação, sendo fundamental para construir algoritmos. Na Filosofia, é usada para formalizar trechos de teorias lógicas de questões epistemológicas. Estudamos sobre o que é a lógica proposicional e encontramos meios para a resolução de alguns problemas que são recorrentes em diversos processos seletivos. O objetivo do trabalho é elaborar palestras dinâmicas para ensinar Lógica, preparando os alunos para esses processos seletivos. Na palestra são explicados conceitos necessários para começar o estudo de Lógica. O aprendizado de conceitos abstratos se da de forma mais eficaz quando associado à problemas do cotidiano, e no final da palestra, apresentar exercícios de provas e observar a resolução que os alunos farão destes exercícios. A partir do que investigamos e analisamos, verificamos uma dificuldade muito grande em mostrar aos alunos a real importância de se aprender lógica. Alunos de escolas públicas necessitam de um cuidado especial por conta da falta de qualidade no ensino público. Infelizmente há uma defasagem muito grande e a diferença se ressalta quando comparamos as notas em processos seletivos de alunos de escolas privadas e escolas públicas. E são atividades como essa que podemos ajudar e capacitar esses alunos. Se a educação é um direito de todos e a Matemática faz parte desse direito, então, cabe aos educadores e a escola, de modo geral, se atentarem à necessidade de propor um ensino que garanta a plena participação e aprendizagem de cada aluno, a partir de suas possibilidades e interesses. Órgão de fomento financiador da pesquisa: PET (Programa de Educação Tutorial) A atividade aconteceu no dia 15 de abril de 2019, na E.E. Profª Julieta Guedes de Mendonça, na cidade de Dracena SP. Foram duas palestras para quatro turmas de terceiros anos do ensino médio. A idade média dos alunos era de 17 anos. As palestras tiveram duração aproximadamente de 1 hora e 30 minutos cada uma. Participaram cerca de 70 alunos. Partimos dos conceitos de Proposições, Simples ou Compostas. Logo passamos para os Conectivos Lógicos. Observamos o entusiasmo dos alunos ao entenderem os conceitos dos conectivos. Ao passar para a tabela verdade de cada conectivo os alunos demoraram a entender a utilidade e aplicação da tabela. O final da apresentação foi surpreendente. Os alunos conseguiram ler os exercícios, interpretaram de maneira simples e responderam de forma correta as questões.

Ensino (ENAENS)

Comunicação oral

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

CURVA CICLOIDE: UMA ABORDAGEM EXPERIMENTAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA

GERSON DOS SANTOS FARIAS
LUCAS OLIVEIRA RIBEIRO

Quando se trata do ensino de matemática é recomendável que o professor aproxime os conteúdos ministrados em sala de aula a situações do dia a dia, pois uma das dificuldades do aluno é perceber a matemática presente em sua rotina. Pensando nisso, o Grupo PET Conexões de Saberes Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Campus de Três Lagoas desenvolveu uma proposta de aula experimental para o ensino médio, a respeito das propriedades da curva cicloide. Mais especificamente, foram apresentados dois experimentos sobre os famosos problemas da braquistócrona e da tautócrona, cujas soluções são a curva mencionada. O objetivo, com esta atividade, foi favorecer o processo de ensino e aprendizagem, mediante a construção geométrica da curva ciclóide, aproximando situações do cotidiano ao conteúdo trabalhado. Portanto o experimento elaborado representa um incentivo à criatividade, ampliando o olhar dos discentes quanto à presença das curvas em seu cotidiano e pode ser usado como ferramenta na fixação do ensino de conceitos como velocidade, aceleração, distância, dentre outros. Órgão de fomento financiador da pesquisa: Programa de Educação Tutorial Como forma de atingir o objetivo foi desenvolvida uma sequência didática com estudantes do Segundo Ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Município de Três Lagoas - MS, abordando a curva cicloide e suas aplicações, posteriormente foi realizada a construção do experimento utilizando materiais concretos de fácil acesso. Com a atividade foram atendidos aproximadamente 30 alunos. No final da atividade os alunos expressaram suas principais impressões sobre a realização da aula experimental. Foi possível verificar um maior dinamismo e participação dos alunos durante a aula, pois de fato, a aplicação dos experimentos chamou a atenção e aguçou a curiosidade, em busca da melhor compreensão do fenômeno observado.

Ensino (ENAENS) UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Comunicação oral Matemática

DIFERENTES ABORDAGENS DO JOGO TWISTER NO ENSINO DE MATEMÁTICA

GERSON DOS SANTOS FARIAS
KAÍSA CAROLINE COSTA MOREIRA
JÉSSICA SOARES DE SOUZA
VINICIUS LOPES DE AGUILAR
LETÍCIA LIMA ALVES
EDERSON LUZ MACEDO
LENARDO LEMES RUNICHI
ALESSANDRO RIBEIRO DA SILVA
EUGENIA BRUNILDA OPAZO URIBE

O jogo como instrumento de ensino e aprendizagem da Matemática, tem sido abordado por grande parte dos educadores, para fixação, introdução e desenvolvimento de conceitos. Com base nisso, o Grupo PET Conexões de Saberes Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Campus de Três Lagoas desenvolveu três diferentes abordagens para o Jogo Twister. O presente trabalho objetiva relatar a experiência de construção e aplicação desses jogos em atividades de ensino e extensão realizadas com alunos e professores do ensino básico. O trabalho desenvolvido permitiu ver as diversas possibilidades de adaptação do jogo que é muito bem aceito entre crianças e adolescentes, foram idealizadas outras adaptações que serão implementadas ainda. Para os alunos envolvidos na atividade foi uma experiência enriquecedora mostrando possibilidades de aulas diferenciadas que poderão ser utilizadas no exercício futuro da profissão. Órgão de fomento financiador da pesquisa: Programa de Educação Tutorial Para isso, foi desenvolvido um trabalho sobre as principais tendências em Educação Matemática como atividade de pesquisa no âmbito do Programa de Educação Tutorial, em busca da construção do referencial teórico, a partir do qual optou-se pela abordagem com jogos lúdicos para diversas faixas etárias. O Twister é popularmente conhecido como um jogo de habilidade física. As adapatações desenvolvidas têm como objetivo proporcionar o aprendizado de diversos conceitos matemáticos, ao invés de utilizar o spinner foram utilizados um dado e uma caixa onde são colocadas perguntas. Foram desenvolvidas três versões: O Twister de Frações utilizado para trabalhar o conceito de frações equivalentes; o Twister de Formas utilizado para identificação de formas geométricas básicas; o Twister da Tabuada com enfoque na memorização e funcionalidade da operação. O trabalho realizado foi desenvolvido durante o segundo semestre de 2018 e primeiro semestre de 2019 incluindo visitas em escolas de Três Lagoas e Região, Mostra de Conhecimentos e Feira das Profissões, atendendo aproximadamente 300 alunos, desde a educação infantil até o ensino fundamental, bem como uma Oficina para professores de ensino básico, através de um projeto de extensão, atendendo no total 20 professores.

Extensão (ENAEXT)

Comunicação oral

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE

Ciências Exatas e da Terra

Matemática

MATEMÁTICA DIVERTIDA NAS ESCOLAS

TAYLA DA SILVA CORRÊA DE FREITAS
LUCAS OLIVEIRA RIBEIRO
DAVI BATISTA LOPES
LUDMILA MARQUES MENEZES
FERNANDA LOUREIRO HONORIO
LENARDO LEMES RUNICHI
ROBERTO JUNIOR DIAS
EUGENIA BRUNILDA OPAZO URIBE
FERNANDO PEREIRA DE SOUZA

O ensino de Matemática enfrenta muitas dificuldades atualmente e professores de Matemática constantemente recorrem à universidade em busca de apoio para tentar melhorar o desempenho dos alunos na disciplina. Assim, o projeto Matemática Divertida é uma ação de extensão que apresentou uma proposta de trabalho utilizando atividades diferenciadas na disciplina de matemática em turmas de Ensino Básico. O trabalho proposto foi idealizado devido ao grupo proponente estar inserido num curso de Licenciatura em Matemática, bem como em um mestrado voltado ao ensino de Matemática (PROFMAT), o que permite aos envolvidos a oportunidade de trabalhar na preparação de recursos didáticos e Laboratório de Ensino como parte da sua atuação. O objetivo do trabalho é relatar a experiência de desenvolvimento e aplicação do projeto aproximando a escola com a universidade buscando, através de atividades lúdicas, despertar interesse e curiosidade em crianças e adolescentes de modo a aproximar os alunos do ensino básico à disciplina, favorecendo assim a interação entre professor e alunos e a melhoria das condições de trabalho em sala de aula. A interação escola-universidade favorece sobre tudo alunos mais carentes e não é diferente no caso da Matemática. Através das atividades do projeto já foram atendidas aproximadamente 800 alunos do ensino básico e os resultados foram muito positivos. Segundo os professores, após as atividades os alunos se mostram motivados para aprender e participar das aulas de matemática o que contribui com os esforços dos professores em melhorar os índices das escolas de Mato Grosso do Sul (MS) em avaliações nacionais e internacionais. Órgão de fomento financiador da pesquisa: PROECE/UFMS Levar a Matemática para dentro da sala de aula de modo a cativar a atenção dos alunos é uma tarefa árdua, o projeto veio ao encontro deste desafio e levou diversos experimentos matemáticos de modo que os alunos pudessem interagir com as atividades e aprender matemática. O projeto apresentou três fases, sendo a primeira com construção de sólidos geométricos utilizando a técnica de origami. Nesta etapa, foram construídos com papel de dobradura os cinco sólidos Platão: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro. Segunda parte foi a apresentação dos sólidos juntamente com jogos que exploram conceitos matemáticos. A última etapa consistiu da elaboração de jogos educativos por partes dos alunos e professores das escolas, tais jogos foram apresentados na semana da Matemática da UFMS no Campus de Três Lagoas.

Ensino (ENAENS)
Comunicação oral

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

OFICINA DE CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS: DIÁLOGOS ENTRE ARTE E MATEMÁTICA

KAÍSA CAROLINE COSTA MOREIRA
GERSON DOS SANTOS FARIAS
ALESSANDRO RIBEIRO DA SILVA
LUDMILA MARQUES MENEZES
FERNANDA LOUREIRO HONORIO
TAYLA DA SILVA CORRÊA DE FREITAS
EUGENIA BRUNILDA OPAZO URIBE

Muitas vezes os conteúdos de Geometria da Educação Básica são abordados de maneira superficial ou simplesmente não são abordados, o que na visão dos autores, reforça a aversão de muitos pelo conteúdo. O presente trabalho tem por objetivo relatar a experiência de planejamento e aplicação de uma oficina de Mosaicos para o ensino de Geometria, na busca de unir Arte e Matemática. A avaliação mostrou a importância de trabalhar Geometria de maneira diferenciada devido ao interesse e participação ativa das crianças. Inicialmente questionados sobre os conceitos que seriam abordados, obtendo poucas respostas que mostraram insegurança e inclusive confusão de conceitos. Após as atividades, foram questionados novamente e as respostas mostraram mais segurança e conceitos identificados de maneira correta. Os autores entendem que houve avanços em relação à visualização associada a identificações de figuras e elementos; em relação à análise através do estudo de possíveis expansões; em relação ao nível da dedução informal através da identificação de propriedades e combinações. Não foi possível avaliar o nível de dedução formal e rigor devido ao tempo. É importante considerar também o impacto para os discentes ministrantes e o futuro exercício da profissão. Órgão de fomento financiador da pesquisa: Programa de Educação Tutorial Foi desenvolvido um trabalho de pesquisa para organizar um referencial teórico sobre possibilidades de trabalhar Arte e Matemática, a partir do qual optou-se pelo trabalho com oficinas pedagógicas adaptáveis a diversas faixas etárias. A oficina de Mosaicos foi desenvolvida com base no modelo de Van Hiele, buscando trabalhar polígonos regulares e suas propriedades, abordando lados, diagonais, ângulos e vértices de uma maneira lúdica, direcionado a apresentar conceitos e motivar os alunos, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento geométrico, seguindo as etapas visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor respeitando a sequência de níveis de compreensão dos conceitos. Através da extensão a oficina foi aplicada a alunos de Ensino Fundamental, sendo organizada em três momentos: 1º) Breve revisão sobre polígonos; 2º) Participantes divididos em grupos, cada grupo recebeu um kit com 30 polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15 e 20 lados, para construir mosaicos livremente; 3º) Verificação das combinações construídas que poderiam ser expandidas no plano. A atividade atendeu cerca de 150 alunos, transitando desde a Educação Infantil até o Ensino Fundamental.

Extensão (ENAEXT)
Comunicação oral

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

RELATO DE EXPERIÊNCIAS: ATUAÇÃO DE ALUNOS DE LICENCIATURA NA ORIENTAÇÃO DE MEDALHISTAS DA OBMEP EM AMBIENTE VIRTUAL

FERNANDO NOVOLI BURGO
WELLIKS FELIPE DE OLIVEIRA
CRISTIANE NESPOLI

A OBMEP, criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Este relato de experiência traduz a atuação de um grupo de alunos de Licenciatura do Curso de Matemática da FCT/Unesp orientando medalhistas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), junto ao Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC). Ainda, destaca-se a qualificação dos futuros professores e a aproximação dos alunos das escolas básicas com as Universidades. Através do desenvolvimento da atividade os licenciandos relataram a oportunidade de exercício da docência e proximidade com a realidade da sala de aula, aprimoramento e qualificação com o estudo dos materiais didáticos e vivenciar o ensino à distância. Assim, permitiu o aprofundamento teórico dos temas estudados e compreender a MRP, tornando-os capazes de conduzir a resolução de problemas por etapas sistematizadas, estimular a ação dos estudantes e, principalmente, desenvolver a habilidade de fazer questionamentos corretos, por exercício, explorando a teoria envolvida. Também, observa-se o fato que as aulas, ministradas à distância, exigiram esforços e estratégias de comunicação. Portanto, é notória a importância do PIC Jr. como ferramenta motivadora aos alunos na escolha profissional, orientando aos que buscam pelas carreiras científicas e tecnológicas. Órgão de fomento financiador da pesquisa: Itaú Social. No PIC Jr., o aluno premiado em cada edição da OBMEP tem a oportunidade de estudar questões no ramo da Matemática em polos presenciais, orientados por professores de Matemática da rede pública, ou por aulas virtuais e orientação de alunos de Licenciatura de universidades públicas. Nesse contexto, os licenciandos de Matemática ministraram aulas em ambiente virtual para estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental através de sala de vídeo conferência disponíveis no portal. Os conteúdos abordados envolveram Aritmética, Geometria, Problemas de Contagem e Combinatória. Para cada aula há um planejamento acadêmico com roteiro de estudos e listas de problemas, trabalhados junto aos estudantes. A metodologia adotada é a Metodologia de Resolução de Problemas (MRP), pressuposto o fato que apenas "mostrar e explicar a solução do problema" não basta no ensino. Assim, ajudasse a descobrir outras formas de aprender, o que acontece por questionamentos, validação de conhecimentos e exploração de erros.

Ensino (ENAENS) UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Comunicação oral Matemática

USO DE FERRAMENTAS TECNOLÓGICAS E MATERIAIS MANIPULÁVEIS PARA A CONSTRUÇÃO DE CÔNICAS E VISUALIZAÇÃO DE SUAS PROPRIEDADES

ALESSANDRO RIBEIRO DA SILVA
GERSON DOS SANTOS FARIAS
EUGENIA BRUNILDA OPAZO URIBE

O estudo de Cônicas é um tema presente no currículo de Matemática de Ensino Médio, mas que dificilmente é abordado ou é abordado de maneira superficial, devido principalmente à falta de tempo para conseguir organizar todos os conteúdos inclusos no currículo escolar. Porém, é frequente nas provas de vestibulares, bem como na prova do ENEM; assim, pesquisar formas de abordar esse conteúdo de maneira atraente para os alunos é interessante para os professores que ensinam Matemática. O objetivo do presente trabalho é relatar uma atividade de ensino vinculada ao trabalho de dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT sobre metodologias alternativas para o ensino de cônicas, desenvolvido em parceria com alunos do Curso de Matemática - Licenciatura do CPTL/UFMS e bolsistas do Programa de Educação Tutorial - PET. As atividades desenvolvidas permitiram uma maior interação dos alunos com o professor, proporcionando um ambiente favorável para a aprendizagem e fixação dos conceitos. O uso de ferramentas tecnológicas aguçou a curiosidade dos alunos, que rapidamente criaram intimidade com o trabalho a ser desenvolvido, permitindo também a criação de um jogo. Os resultados mostraram a importância do uso de metodologias alternativas, inclusive conjugando materiais concretos com ferramentas tecnológicas, o que implica a constante atualização do professor. Órgão de fomento financiador da pesquisa: Programa de Educação Tutorial O trabalho foi realizado em duas frentes, primeiro foi realizada a abordagem com o software GeoGebra e a ferramenta Scratch para construção e visualização das cônicas e suas propriedades em aulas planejadas para serem desenvolvidas na sala de tecnologia da escola e em seguida, uma atividade de construção de hipérboles utilizando materiais simples como massa de modelar, barbante, régua e papel para a construção de um cone a partir do qual são obtidos curvas que são representadas no papel, posteriormente o aluno teve oportunidade de demonstrar por meio de medidas/provas com régua e compasso que as figuras obtidas representam realmente uma hipérbole. As atividades foram desenvolvidas e testadas em oficinas com um grupo de alunos do curso de Matemática - Licenciatura do CPTL/UFMS, quanto a sua aplicabilidade e detecção de possíveis inconsistências, para posteriormente fazer o planejamento e aplicação na Educação Básica. O trabalho foi aplicado em duas escolas de Educação Básica de Três Lagoas-MS, atendendo aproximadamente 50 alunos entre 7º e 9º do Ensino Fundamental.