2022 ENEPE

CIÊNCIA
CONSCIÊNCIA
HUMANIZAÇÃO

50 Unoeste
17 a 21 de outubro de 2022
Anais do ENEPE
ISSN 1677-6321

ARTIGOS COMPLETOS

UM ESTUDO SOBRE A CONJECTURA DE TOEPLITZ

Fernanda Loureiro Honorio, Allan Edley Ramos de Andrade

Universidade Federal de Mato Grosso Do Sul – UFMS, E-mail: honorio.fer@outlook.com

RESUMO
A Conjectura de Toeplitz é um problema em aberto que aborda a possibilidade de inscrever quadrados em qualquer curva, desde que esta seja simples, plana e fechada. Pela dimensão desta afirmação ainda não há uma prova geral para o resultado, no entanto, ao limitarmos as curvas podemos encontrar provas para partes específicas do problema. Dessa forma, este trabalho irá abordar o caso de inscrição de quadrados em alguns polígonos regulares e na circunferência. Especificamente mostraremos, utilizando construções geométricas e conceitos básicos da geometria e trigonometria, como inscrever um quadrado em um triângulo qualquer e posteriormente como determinar o lado do quadrado em função dos lados para o caso de triângulos isósceles e equilátero; além disso será mostrado diversas formas de inscrição de quadrados em quadrados, como construir um quadrado em uma circunferência de raio r e obter o valor do lado do quadrado em função do raio r e, por fim, como construir um quadrado em um pentágono regular e obter o seu lado em função do lado do pentágono.
Palavras-chave: quadrados; polígonos; medidas.

A STUDY ON THE TOEPLITZ CONJECTURE

ABSTRACT
The Toeplitz Conjecture is an open-ended problem that addresses the possibility of inscribing squares in any curve, as long as it is simple, flat and closed. Due to the size of this statement, there is still no general proof for the result, however, by limiting the curves we can find proof for specific parts of the problem. In this way, this work will approach the cases of squares inscribed in some regular polygons and in the circumference. Specifically, we will show, using geometric constructions and basic concepts of geometry and trigonometry, how to inscribe a square in any triangle and later how to determine the side of the square as a function of the sides in the case of isosceles and equilateral triangles; in addition, several ways of inscribing squares in squares will be shown, how to construct a square in a circle of radius r and obtain the value of the side of the square as a function of radius r and, finally, how to construct a square in a regular pentagon and obtain the its side as a function of the side of the pentagon.
Keywords: squares; polygons; measurements.

1. INTRODUÇÃO

A Conjectura de Toeplitz, proposta em 1911 por Otto Toeplitz, é um problema em aberto da geometria plana e consiste em afirmar que “qualquer curva plana simples fechada contém os quatro vértices de algum quadrado”. Assim, esta conjectura, que é também conhecida como problema do quadrado inscrito, ainda não foi demonstrada, ou seja, ainda não apresentaram uma prova geral para tal afirmação. Esse fato se dá pela grande dimensão desse enunciado, já que as curvas citadas podem ser tanto polígonos, que conhecemos desde o ensino básico, quanto curvas que não possuem simetria ou propriedades em comum.

No entanto, já existem provas para casos mais específicos da conjectura, onde as propriedades das curvas são limitadas. Visto isto, além de apresentar estudos introdutórios sobre este tema, apresentando demonstrações deste enunciado para casos mais simples, que envolvem alguns polígonos regulares e a circunferência, este trabalho objetiva também mostrar a aplicação e utilidade de alguns conceitos vistos em geometria e trigonometria.

Será abordado, neste trabalho, as possíveis formas de inscrever quadrados em triângulos, quadrados, pentágonos regulares e em circunferências, além da determinação das medidas dos lados desses quadrados inscritos. Dessa forma, para o estudo destas vamos utilizar conceitos básicos da geometria plana, retomando-os durante a demonstração e os aplicando, assim como utilizar conceitos básicos de trigonometria e geometria analítica. Dito isso, poderemos revisar tais resultados da geometria enquanto exploramos um problema ainda sem solução.

2. METODOLOGIA

O presente trabalho é resultado de uma atividade de pesquisa individual pertencente ao grupo PET Conexões de Saberes Matemática da UFMS, Campus de Três Lagoas. O estudo foi realizado a partir de pesquisas teóricas, através de leituras, discussões e apresentação de seminário sobre o tema com o orientador, realizados para a exposição das demonstrações e das dúvidas sobre os conceitos utilizados para a realização do trabalho.

No primeiro momento, foram estudadas as demonstrações para o problema em figuras mais simples, como os triângulos, o quadrado e a circunferência, e em seguida a demonstração do resultado em pentágonos regulares, que utilizou conceitos mais complexos. Para esta primeira parte usamos como referência principal [3] e [4]. Em seguida, utilizando as referências [1] e [2] todos os resultados de geometria e trigonometria utilizados neste trabalho foram revisados e compreendidos de forma efetiva.

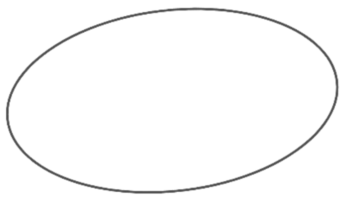
3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Conjectura de Toeplitz enuncia que “qualquer curva plana simples fechada contém os quatro vértices de algum quadrado”.

Abaixo seguem as definições em uma linguagem simplificada dos conceitos de curva plana simples e fechada:

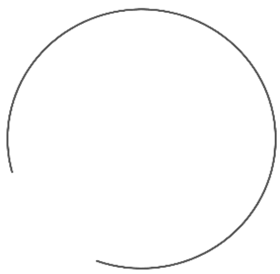
Definição 1: Uma curva plana é uma curva que se situa em um só plano euclidiano.
Definição 2: Uma curva simples é uma curva que não possui auto interseção.
Definição 3: Uma curva fechada é uma curva que começa e termina no mesmo ponto, não possui extremidades.

Figura 1. Exemplo de curva simples fechada.



Fonte: Geogebra.

Figura 2. Exemplo de curva simples aberta.



Fonte: Geogebra.

Teorema de Jordan: Uma curva de Jordan separa o plano em duas regiões, uma limitada e outra ilimitada, sendo o traço da curva a fronteira comum das duas regiões.

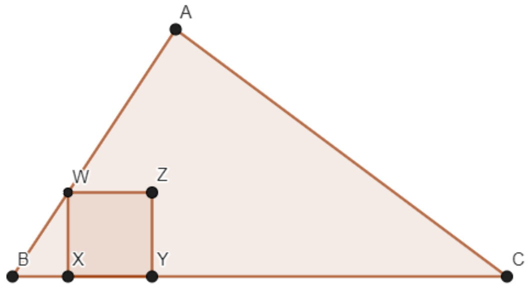
3.1. Inscrevendo os quadrados em triângulos

Iniciaremos esta seção mostrando como inscrever um quadrado em um triângulo qualquer usando construções geométricas, demonstrando assim que a conjectura de Toeplitz é verdadeira para as curvas que formam um triângulo. Posteriormente será abordado o caso específico de triângulo isósceles e triângulo equilátero, onde será obtido o lado do quadrado inscrito em função dos lados do triângulo.

3.1.1. Um triângulo qualquer

Seja ABC um triângulo qualquer, vamos construir um quadrado inscrito nesta figura. É preciso, primeiramente, escolher um ponto X em um dos lados, após isso será necessário traçar uma perpendicular entre o ponto e o lado a que ele pertence e então demarcar um ponto W na interseção da perpendicular ao outro lado do triângulo. Após isso, construiremos um quadrado com a medida do segmento $\overline{WX}$, o quadrado WXYZ (veja figura 3).

Figura 3. Triângulo ABC qualquer.

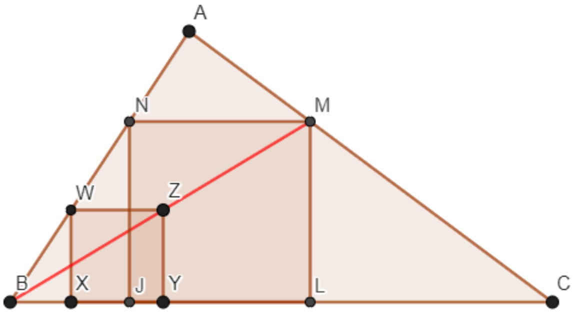


Fonte: Geogebra.

Agora, é preciso traçar um segmento que passa pelo vértice B do triângulo e pelo ponto Z. Assim, tomando o ponto M como a interseção do segmento traçado com o lado $\overline{AC}$, a partir dele traçaremos uma perpendicular ao lado $\overline{BC}$ e uma reta paralela ao mesmo lado $\overline{BC}$.

Considerando a interseção dessas retas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ como os pontos L e N, respectivamente, vamos traçar uma perpendicular a partir do ponto N sobre o lado $\overline{BC}$ e considerar sua interseção como o ponto J. Assim, temos o retângulo $JLMN$.

Figura 4. Retângulos inscritos no triângulo ABC.



Fonte: Geogebra.

Vamos provar que $\overline{NM} = \overline{ML}$. Ou seja, que o retângulo $JLMN$ é um quadrado.

Note que o triângulo BYZ é semelhante ao triângulo BLM, já que ambos possuem um ângulo reto e compartilham do mesmo vértice em B, dessa forma, podemos concluir que possuem os três ângulos congruentes. Assim, pela semelhança entre triângulos, podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{YZ}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{BM}}. \quad (1)$$

Além disso, o triângulo BWZ é semelhante ao triângulo BNM, já que os ângulos $W\hat{Z}B$ e $N\widehat{M}B$ são correspondentes e ambos compartilhando do mesmo vértice em B. Logo:

$$\frac{\overline{WZ}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{BM}}. \quad (2)$$

De (1) e (2) temos:

$$\frac{\overline{YZ}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{WZ}}{\overline{NM}}.$$

Como, pela construção da figura, $\overline{YZ}$ e $\overline{WZ}$ são lados de um mesmo quadrado, temos $\overline{YZ} = \overline{WZ}$, logo podemos concluir que $\overline{LM} = \overline{NM}$, assim como queríamos mostrar.

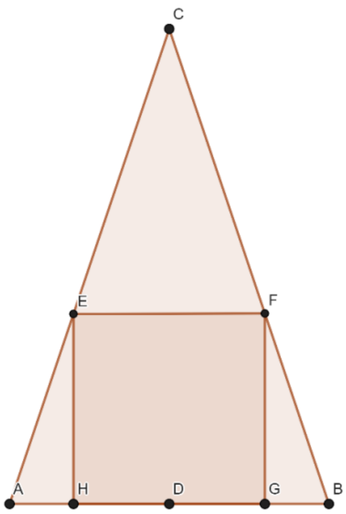
Portanto, $MNJL$ é um quadrado, já que por construção a figura já era um paralelogramo. Logo, $\overline{MN} = \overline{JL}$ e $\overline{NJ} = \overline{ML}$, o que resulta em $\overline{MN} = \overline{JL} = \overline{NJ} = \overline{ML}$.

3.1.2. O triângulo isósceles

Ao inscrever um quadrado em um triângulo, pelo Princípio das gavetas, é necessário que dois dos vértices do quadrado pertençam a um mesmo lado do triângulo, ou seja, pode-se concluir que um dos lados do quadrado está totalmente contido num lado do triângulo.

Considerando o triângulo ABC e o retângulo $EFGH$ inscrito no triângulo com $\overline{EF}$ paralelo a $\overline{AB}$, $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ perpendiculares a $\overline{AB}$ e o ponto D como ponto médio de $\overline{HG}$, vamos determinar as posições dos pontos do retângulo de forma que $EFGH$ seja um quadrado.

Figura 5. Triângulo isósceles ABC.



Fonte: Geogebra

Note que D é também ponto de médio do lado $\overline{AB}$. De fato, o triângulo EHA é semelhante ao triângulo FGB pois possuem dois ângulos congruentes (ângulo reto e o ângulo da base do triângulo isósceles). Além disso como $\overline{EH} = \overline{FB}$ (lados do quadrado), conclui-se que a semelhança é na verdade uma congruência e, portanto, $\overline{HA} = \overline{GB}$, de onde conclui-se que $\overline{DA} = \overline{DB}$.

Como o lado $\overline{AC}$ é uma transversal que corta as retas que contém os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ que são paralelas, podemos afirmar que:

$$C\hat{E}F = C\hat{A}B \text{ e } C\hat{F}E = C\hat{B}A.$$

Assim, como o ângulo $A\hat{C}B$ é comum aos dois triângulos podemos concluir que os triângulos ABC e EFC são semelhantes. Logo, o triângulo EFC é isósceles de base $\overline{EF}$, e temos a seguinte relação:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CD}-\overline{EH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{HG}}.$$

Denotando a altura $\overline{CD}$ por h e a base $\overline{AB}$ por b, é necessário encontrar os lados $\overline{EH} = \overline{HG} = l$ do quadrado $EFGH$. Assim, substituindo essas notações temos:

$$\frac{h}{h-l} = \frac{b}{l} \Rightarrow l = \frac{bh}{h+b}. \quad (3)$$

Denotando Lcomo sendo o lado do triângulo isósceles ABC e aplicando o teorema de pitágoras ao triângulo CDB obtemos $h = \sqrt{L^2 - \frac{b^2}{4}}$, substituindo em (3) tem-se: $l = \frac{b\sqrt{L^2-\frac{b^2}{4}}}{\sqrt{L^2-\frac{b^2}{4}}+b}$.

Assim, para inscrever um quadrado em um triângulo isósceles de lado L e base b, basta encontrar o ponto médio de um de seus lados e marcar os pontos H e G de forma que eles distem $\frac{l}{2}$ do ponto médio, após isso traçar as retas que passam por H e G e sejam perpendiculares ao lado a que esses pontos pertencem. As interseções dessas perpendiculares com os outros dois lados do triângulo determinam os pontos E e F. Traçando um segmento entre esses quatro pontos teremos então o quadrado $EFGH$, inscrito em um triângulo isósceles qualquer.

Note que no caso do triângulo equilátero de lado L basta substituir, na fórmula, a base b pelo lado L do triângulo. Dessa forma, teremos que o lado l do quadrado inscrito no triângulo equilátero terá a seguinte medida:

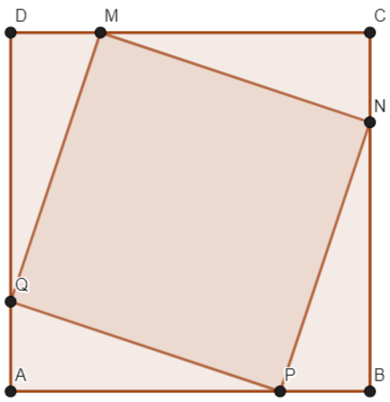
$$l = L(2\sqrt{3} - 3).$$

Assim, utilizando o mesmo método usado para inscrever o quadrado no triângulo isósceles a partir da medida l encontrada, será também possível inscrever o quadrado no triângulo equilátero dado.

3.2. O quadrado

Nesta seção mostraremos que é possível inscrever um quadrado em um quadrado de diversas formas. Obviamente o quadrado pode ser inscrito nele mesmo tomando-se os mesmos vértices, assim a conjectura de Toeplitz para este caso é trivial. Seja dado o quadrado $ABCD$. Consideraremos um quadrilátero $MNPQ$ inscrito no quadrado $ABCD$, de forma que cada um dos vértices do quadrilátero esteja sobre um lado diferente de $ABCD$, assim, vamos supor M, N, P e Q contidos em $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. Para que $MNPQ$ seja, de fato, um quadrado vamos mostrar que é suficiente termos $\overline{CM} = \overline{BN} = \overline{AP} = \overline{DQ}$.

Figura 6. Quadrado ABCD.



Fonte: Geogebra.

Essa construção nos permite afirmar que o quadrilátero $MNPQ$ é um quadrado, já que, dessa forma, podemos observar que os triângulos CMN, BNP, APQ e DQM são congruentes, resultando a seguinte igualdade:

$$\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM}.$$

Note que a congruência dos triângulos é dada pelo fato de todos possuírem um ângulo e os dois lados que o formam congruentes. Pela construção do quadrado $ABCD$ e do quadrilátero $MNPQ$, podemos observar que todos os triângulos possuem um ângulo reto e lados iguais em $\overline{CM} = \overline{BN} = \overline{AP} = \overline{DQ}$, e por consequência, $\overline{DM} = \overline{CN} = \overline{PB} = \overline{QA}$.

Além disso, podemos também observar que, pela congruência dos triângulos CMN, BNP, APQ e DQM, temos $A\hat{P}Q = D\hat{Q}M = C\hat{M}N = P\hat{N}B$, e dessa forma, como os ângulos agudos dos triângulos são complementares, segue que os ângulos internos do quadrilátero $MNPQ$ são todos retos e, portanto, $MNPQ$ é um quadrado.

Desse modo, para inscrever um quadrado no quadrado $ABCD$ basta marcar os pontos M, N, P e Q sobre seus lados de forma que:

$$\overline{CM} = \overline{BN} = \overline{AP} = \overline{DQ} = x.$$

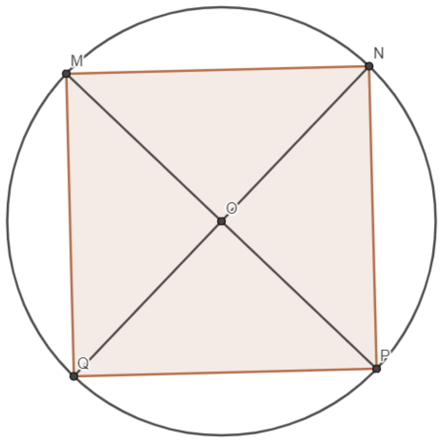
Seja L a medida do lado do quadrado $ABCD$, então pelo teorema de Pitágoras teremos que a medida do lado do quadrado $MNPQ$ inscrito será:

$$\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM} = \sqrt{x^2 + (L - x)^2}.$$

3.3. A circunferência

Nesta seção, mostraremos que é possível a inscrição de um quadrado em uma circunferência qualquer de raio r, além disso é possível determinar o lado do quadrado em função de r. Seja dado uma circunferência qualquer de raio r. Mostraremos que para que um quadrilátero $MNPQ$, inscrito na circunferência, seja um quadrado basta que seus vértices M, N, P e Q sejam os extremos de dois diâmetros perpendiculares entre si.

Figura 7: Circunferência de raio r.



Fonte: Geogebra.

Observe que os triângulos OMN, ONP, OPQ e OQM são congruentes, já que todos possuem dois lados congruentes, sendo estes os lados que são o raio da circunferência, e o ângulo do vértice O em comum, logo temos que:

$$\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM}.$$

Além disso, note que como $\overline{MP}$ e $\overline{QN}$ são diâmetros da circunferência e a medida do ângulo inscrito equivale à metade da medida do ângulo central, segue que

$$Q\widehat{M}N = M\widehat{N}P = N\widehat{P}Q = P\widehat{Q}M = 90^0,$$

o que mostra que $MNPQ$ é, de fato, um quadrado. Assim, pelo teorema de Pitágoras, a medida do lado do quadrado inscrito em uma circunferência de raio r, será

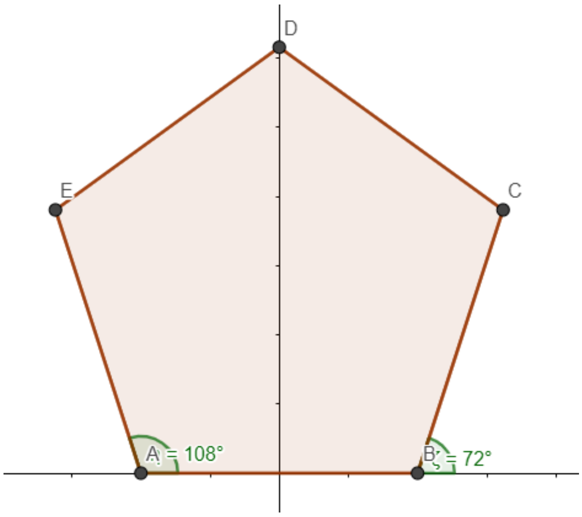
$$\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM} = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

3.4. O pentágono regular

Nesta seção vamos mostrar uma forma de inscrever um quadrado em um pentágono regular $ABCDE$ e obter o lado do quadrado em função do lado do pentágono. Para isso, é preciso que um de seus lados seja paralelo a um dos lados do pentágono, nesse caso consideraremos este sendo o lado $\overline{AB}$.

Assim, para melhor visualização da construção da demonstração, vamos localizar o pentágono no plano cartesiano de modo que seu lado paralelo ao lado do quadrado inscrito esteja sobre o eixo das abcissas e que o ponto médio desse lado esteja sobre a origem. Pela simetria do pentágono regular, o vértice D, oposto ao lado $\overline{AB}$, está sobre o eixo das ordenadas.

Figura 8: Pentágono regular ABCDE.



Fonte: Geogebra.

Agora, a fim de encontrar as coordenadas dos vértices do pentágono, vamos considerar L como a medida de seu lado. Como o ponto médio do lado ABtem coordenada $(0,0)$ teremos que os pontos A e B possuem, respectivamente, coordenadas $\left(\frac{-\mathrm{L}}{2},0\right)$ e $\left(0,\frac{\mathrm{L}}{2}\right)$. Para determinarmos as coordenadas do ponto $C=(x_c,y_c)$, podemos considerar que os ângulos internos de um pentágono regular medem 108^0, assim o suplementar desse ângulo será 72^0. Dessa forma:

$$\text{sen } 72^0 \ =\frac{y_c}{L} \Rightarrow y_c = L \text{ sen } 72^0 \ ,$$

e

$$cos\ 72^0 = \frac{x_C-\frac{L}{2}}{L} \ \ \Rightarrow \ \ x_c = \frac{L}{2}(1+2cos\ 72^0\ ).$$

Assim, usando que $sen\ 72^0\ =\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ e $cos\ 72^0\ =\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (resultados estes apresentado em [1]), temos:

$$x_c = \frac{L}{2}\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \ \Rightarrow \ x_c = L\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right),$$

e

$$y_C \ = L\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Logo, temos:

$$C=(x_c,y_c)=\left(L\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right),L\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right).$$

Vamos agora encontrar os vértices do quadrado inscrito. Para isso consideraremos funções f_1, f_1, f_3, f_4, cujos gráficos descrevem os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$, respectivamente. Como o pentágono é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, podemos considerar como vértices de um retângulo $MNPQ$, inscrito no pentágono, os pontos que possuem coordenadas:

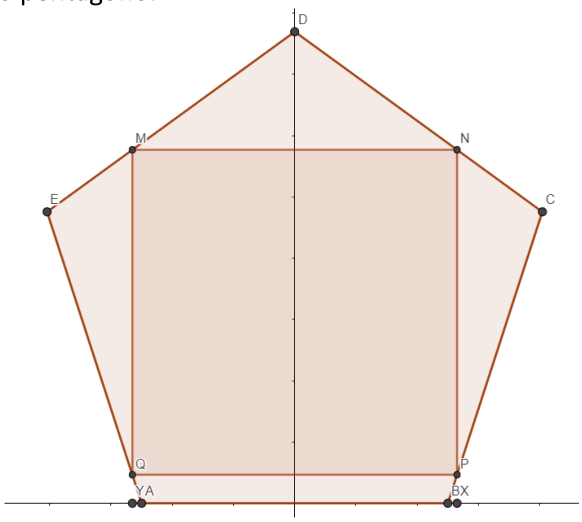
$$Q=(-x,f_4(-x)),\ P=(x,f_1(x)),$$
$$M=(-x,f_3(-x)),\ N=(x,f_2(x)),$$

com $\frac{L}{2} < x < x_c$.

Agora, para definirmos $MNPQ$ como um quadrado basta encontrarmos um x que satisfaça:

$$f_2(x)-f_1(x)=f_3(-x)-f_4(-x)=2x. \ (4)$$

Figura 9: Quadrado inscrito no pentágono.



Fonte: Geogebra.

Note que a relação (4) significa que devemos encontrar um x, que será a metade dos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{MN}$, já que o ponto médio de ambos os lados tem coordenada 0 no eixo das abcissas , tal que o valor do lados lados $\overline{QM}$ e $\overline{NP}$ seja $2x$. Ou seja, teremos

$$\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM} = 2x.$$

Assim, vamos encontrar as funções f_1 e f_2 e então calcular x de modo que

$$f_2(x) - f_1(x) = 2x.$$

Sabemos que a reta que passa pelo ponto de coordenadas (x_0, y_0) e que possui coeficiente angular igual a tg α (onde α é o ângulo de inclinação) possui equação dada por

$$f(x) = y_0 + tg\ \alpha\ (x - x_0).$$

Assim:

$$f_1(x) = 0 + tg\ 72^0 \left(x - \frac{L}{2}\right) \ \Rightarrow$$
$$f_1(x) = \ tg\ 72^0\ (x - \tfrac{L}{2}),$$

e

$$f_2 = L\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - tg\ 36^0 \left(x - L\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\right).$$

Considerando que $tg\ 36^0 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ e $tg\ 72^0 = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ (resultados estes apresentados em [1]), obtemos:

$$f_1(x) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}\ \left(x - \frac{L}{2}\right)$$

e

$$f_2(x) = L\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\, x + \frac{L(1+\sqrt{5})\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}{4}$$

Substituindo as expressões de f_1 e f_2 em (4), temos:

$$f_2(x) - f_1(x) = 2x$$
$$\Rightarrow\ x = \frac{L}{4}\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}}\right).$$

Assim, para inscrever um quadrado em um pentágono $ABCDE$ de lado L, é preciso encontrar o ponto médio de um dos lados, sendo neste caso o lado $\overline{AB}$, e então marcar os pontos X e Y que distam x unidades desse ponto. Após isso, é necessário traçar duas retas perpendiculares a reta que contém $\overline{AB}$ e que passam por X e Y. Por fim, basta marcar os pontos de interseção dessas retas com os lados do pentágono $ABCDE$, e teremos que esses pontos determinarão os vértices de um quadrado inscrito.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi realizado, neste trabalho, um estudo sobre a veracidade da conjectura de casos da conjectura de Toeplitz. Especificamente Foram abordadas as formas de se inscrever um quadrado em triângulos, sendo estes isósceles, equiláteros ou em casos gerais, quadrados, circunferência e, por fim, em pentágonos regulares. Além disso, também foi apresentado a medida dos lados desses quadrados inscritos a partir das medidas dos objetos geométricos apresentados em cada caso. Além disso, através das demonstrações desenvolvidas se tornou notável a importância dos conceitos estudados na geometria plana, trigonometria e geometria analítica. Assim, fica evidente que mesmo os conceitos simples se aplicam em demonstrações que podem ser mais rigorosas, e assim, existe a importância destes serem plenamente entendidos. Por fim, este trabalho é uma introdução as demonstrações dos casos da Conjectura de Toeplitz, e pode vir a se tornar um estímulo para posteriores estudos nessa área.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa de Educação Tutorial e a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. F., MORGADO, A. C., WAGNER, E. Trigonometria e Números Complexos. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar, volume 2. Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OTHECHAR, P. F. S. A Conjectura de Toeplitz no Ensino Básico. Revista do professor de matemática, n° 93. Mato Grosso do Sul: UFMS, 2017.

PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Aula 12 – Quadrado inscrito em um triângulo. Youtube, 25 mar. 2015. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=Ltyu692Gr4g>. Acesso em 30 abr. 2022.

RESUMOS

Pesquisa (ENAPI) UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Comunicação oral (on-line) Matemática

O USO DO SCRATCH COMO FERRAMENTA DE APOIO AO APRENDIZADO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA NO CONTEXTO DO CURRÍCULO PAULISTA

RUBENS LUIZ RODRIGUES

A utilização das novas tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs) nos espaços de aprendizagem escolar conduz a uma inovação no ressignificado dos conceitos dos objetos do conhecimento. Ainda que a Matemática Aplicada e Computacional tenha avançado de forma significativa junto aos meios tecnológicos, o ensino de Matemática, sobretudo ao nível de Ensino Médio, não tem alinhado a este avanço. Uma sequência didática tem como justificativa potencializar o processo de ensino e aprendizagem que viabiliza o planejamento da aula do professor e além disso, promove a melhoria da qualidade de ensino oferecida ao estudante. Dessa forma, a sequência didática elaborada com apoio do Scratch amplia o domínio sobre as competências relacionadas ao uso de ferramentas digitais, introduz a compreensão e aplicação do Pensamento Computacional. Dessa forma, insere desafios que permitem despertar conflitos cognitivos e ainda promove um ambiente de aprendizagem dinâmico e estimulante as habilidades socioemocionais dos estudantes. O presente trabalho teve como objetivo verificar a utilização do software Scratch como ferramenta de apoio ao Currículo Paulista (2022) no desenvolvimento de uma sequência didática sobre o aprendizado da função quadrática orientada ao público alvo do 1.º ano do Ensino Médio, em que este conceito é abordado. Caracterizamos a metodologia como pesquisa qualitativa do tipo aplicada e investigativa que permitiu o desenvolvimento de procedimentos de coleta e seleção de dados em busca dos conhecimentos prévios do público alvo, tomando como base a Teoria de aprendizagem significativa de Ausubel sobre esta ferramenta de estudo. Verificamos, por meio das análises parciais que o uso do software Scratch proporcionou a possibilidade de oferecer excelentes resultados esperados, relacionados com o potencial de aprendizagem significativa dos estudantes no aprendizado do presente objeto de conhecimento abordado e os avanços no processo de aprendizagem por meio de dados comparativos dos resultados das avaliações propostas pela Secretaria da Educação de São Paulo. Finalmente, foi possível a partir da análise dos dados da Avaliação Diagnóstica de Entrada (ADE) realizada no início e Avaliação de Aprendizagem em Processo realizada no 2º bimestre, identificar a partir do percentual de acertos das duas turmas da 1ª série do Ensino Médio, avanços significativos na sua aprendizagem.

RELATOS DE EXPERIÊNCIA

Ensino (ENAENS)

Comunicação oral (on-line)

UNIVERSIDADE DO OESTE PAULISTA - UNOESTE
Ciências Exatas e da Terra
Matemática

BUSCANDO SOLUÇÕES PARA DIFICULDADE DE APRENDIZAGEM COM ATIVIDADE: A MATEMÁTICA PRESENTE EM TODOS OS DIAS - RELATO DE EXPERIÊNCIA

VITOR HUGO DOMICIANO BENITEZ

O presente relato retrata a experiência enquanto docente da disciplina de matemática da primeira série do Ensino Médio de uma escola da rede pública do Estado de São Paulo, em que lecionei durante dez meses. Com a pretensão de buscar melhorias relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem de matemática, foi desenvolvida uma ação baseada na mobilização dos estudantes a respeito de reflexões acerca da importância da matemática para todos os momentos da vida, nos mais diversos contextos, com o projeto A matemática no cotidiano dos alunos. A proposta desenvolvida foi atrelada ao Método de Melhoria de Rendimento (MMR), que faz parte do Programa de Gestão em Foco da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. O objetivo de experiência é melhorar o aprendizado de estudantes na disciplina de matemática, por meio do projeto "A matemática no cotidiano dos alunos", aplicado com base no Método de Melhoria de Rendimento (MMR), de uma escola pública da rede de Educação do Estado de São Paulo. Com o desenvolvimento do projeto foram revelados dados que indicaram que há uma quantidade considerável de estudantes com defasagem em matemática, e outra parcela, que há um número de estudantes com conhecimentos que foram alcançados durante as atividades realizadas. Possibilitamos reflexões aos estudantes sobre observações a respeito da presença da matemática em situações do cotidiano, possibilitando a contextualização e conscientização sobre a importância da matemática para a vida. Com a ação desenvolvida, foi possível perceber que relacionar e discutir sobre a matemática de maneira contextualizada pode contribuir para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem nesta área do conhecimento. O projeto foi desenvolvido em algumas etapas, estruturado em sequência didática. Na primeira atividade, foi disponibilizada aos estudantes uma tabela que continha colunas com dia da semana, horário e o que os alunos observaram no dia-a-dia que possuía matemática. Após a anotações, as aulas foram divididas, para discussões a respeito das observações que os alunos apontaram sobre situações concretas que tinham a matemática. A segunda etapa teve como atividade a gamificação, por meio de um bingo na forma presencial, e, remota, com cartelas personalizadas pelos professores. Para finalizar a terceira etapa do processo diante de uma avaliação que foi realizada na plataforma digital Google Forms, em que foram apontados dois tipos de resultados.

LEITURA - ENRIQUECENDO A FORMAÇÃO CULTURAL E PEDAGÓGICA DOS DISCENTES DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TÁSSILA CAROLINE NASCIMENTO BEZERRA
ROBERTA DE ARAÚJO LIRA
ELLISAMA VICTHÓRIA TEIXEIRA DE ARAÚJO
ESTTHER VICTHÓRIA TEIXEIRA DE ARAÚJO
LENARDO LEMES RUNICHI

O presente trabalho tem por objetivo apresentar a atividade de ensino realizada pelo grupo PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL, "Aprimorar a formação cultural através da leitura" que foi criada no ano de 2011 e tem como finalidade ajudar a melhorar a expressão oral e escrita, estimular o gosto pela leitura e contribuir com o enriquecimento cultural dos discentes do curso de Matemática. Esta atividade é oferecida buscando o enriquecimento cultural dos estudantes, visto que cada aluno apresenta ao grupo as considerações sobre o livro que escolheu para leitura e em seguida discutem sobre. A atividade permite conhecer expressões e aprender palavras não utilizadas em seu cotidiano anteriormente e ainda auxilia na fixação da grafia correta das palavras. Em contrapartida, a apresentação do livro ao grupo ajuda na organização e sintetização das ideias, bem como diminui a insegurança produzida por falar em público, além de auxiliar na desmistificação dos tabus e estereótipos criados entre leitura e matemática. A atividade traz resultados positivos para o curso e para a instituição, uma vez que aprimorar a formação dos discentes consequentemente através do efeito multiplicador ajuda os demais estudantes do curso, contribuindo com a busca pela qualidade na formação. Com esta atividade é notório os resultados positivos obtidos, visto que além de estimular o gosto pela leitura dos envolvidos e melhorar a formação acadêmica e cultural, em termos de ortografia e redação os participantes conseguem obter um aprimoramento em sua oratória, bem como a obtenção de conhecimentos em geral adquiridos durante o período da atividade. A atividade tem um período de desenvolvimento anual e é realizada em duas etapas, a primeira etapa é realizada de maneira individual por cada um dos participantes em relação a escolha do livro e a leitura. A segunda etapa é coletiva e é realizada na reunião do grupo destinada para execução da atividade na forma de rodízio, onde cada aluno após ter feito a leitura do livro escolhido apresenta ao grupo e em seguida discutem sobre o tema. A atividade iniciou de maneira presencial, mas devido ao cenário pandêmico e distanciamento social se fez necessário readaptar a atividade, no qual as discussões foram feitas de maneira remota através de reuniões online mantendo os mesmos critérios de escolha do livro e consequentemente após todas atribuições e discussões é proposto uma reunião para avaliação pontuando os tópicos positivos e as possíveis melhorias.